A longa distância ($r > 2\sigma$) predominam as forças de dispersão de London, polarização ou electrostáticas — atractivas.

Não existe nenhuma expressão analítica que traduza, duma forma unívoca, o potencial intermolecular, pelo que têm sido desenvolvidos vários modelos matemáticos que pretendem ser uma aproximação física ao potencial intermolecular.

Dos modelos desenvolvidos foram aplicados, no presente trabalho, os modelos de Lennard-Jones e Kihara **[9]** dados respectivamente pelas equações 5 e 6, e o modelo de Dymond-Alder **[10]** que sendo um potencial numérico não tem expressão analítica.

$$\frac{\phi(r)}{\varepsilon} = 4\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right] \tag{5}$$

$$\frac{\phi(r)}{\varepsilon} = \left[\left(\frac{r_o}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_o}{r}\right)^{6}\right] \tag{6a}$$

$$r_o = (\sigma - d)^6 \sqrt{2} \tag{6b}$$

No potencial de Kihara d é o diâmetro do cerne rígido e a sua importância costuma ser expressa pelo parâmetro $\gamma = d/(\sigma - d)$.

3.2. Escolha dos parâmetros

3.2.1. Método das isotérmicas

O cálculo dos parâmetros ε e σ pode ser feito seguindo o método das isotérmicas **[9]**. Este método baseia-se na utilização da equação (1) na forma

$$\frac{\Omega^{(2,2)*}(T^*)}{f_\eta(T^*)} = \frac{5}{16}\,\frac{(\pi\, mkT)^{1/2}}{\pi\,\sigma^2\,\eta(T)} \tag{7}$$

em que $T^* = kT/\varepsilon$ é a temperatura reduzida e no lado direito da equação (7) utilizam-se valores experimentais de $\eta(T)$ para cada gás. Para se iniciar o cálculo torna-se necessário usar uma primeira estimativa de σ para o gás em causa que foi escolhido comparando os valores de σ obtidos por outras propriedades e também pela viscosidade, para cada tipo de potencial **[9]**.

Admite-se que $f_\eta(T^*) = 1$, e para cada par de pontos $\eta(T)$ obtém-se $\Omega^{(2,2)*}(T^*)$. Pela consulta dos integrais de colisão para cada potencial, obtém-se o valor de T^* e consequentemente o valor de ε. Ficamos com um par de valores (ε, σ) a uma dada temperatura. Uma vez conhecido T^* podemos reciclar, obter $f_\eta(T^*)$, a razão (7) e obter um novo valor de ε correspondente a σ. Escolhem-se seguidamente outros valores de σ e obtém-se uma recta para cada temperatura, quando se representa ε em função de σ. O processo é repetido para outras temperaturas obtendo-se um feixe de rectas, que se cruzariam num ponto único se o potencial utilizado fosse o potencial real entre as moléculas. Como na realidade se trata de um modelo diferente do potencial real, as rectas cruzam-se numa zona do diagrama (ε, σ) esboçado na Fig. 2. Dum modo geral, os dados de baixa temperatura conduzem a valores baixos de ε e altos de σ enquanto que os dados de alta temperatura conduzem a valores altos de ε e baixos de σ.

A escolha dos valores de (ε, σ) recai sobre um par de valores médios, os mais prováveis da zona referida.

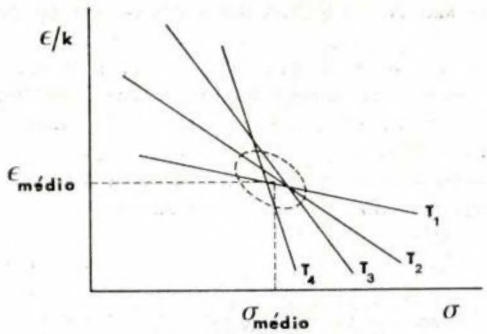


FIG. 2

Cálculo dos parâmetros dos potenciais a partir dos dados de viscosidade $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$

Este processo foi utilizado para os potenciais de Lennard-Jones 6-12 e de Dymond-Alder, no primeiro caso para o crípton e azoto e no segundo para o azoto e metano, encontrando-se os valores obtidos na Tabela I. O valor dos integrais de colisão foram obtidos para os potenciais de Lennard-Jones e Dymond-Alder da referência **[9]**, e para o potencial de Kihara da referência **[14]**.

3.2.2. Método dos estados correspondentes

Outra forma de obter os parâmetros é a baseada no princípio dos estados correspondentes, em que a razão entre os parâmetros é função das razões entre as propriedades críticas, isto é, T_C, V_C e P_C **[11]**.

$$\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)_i = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)_{Ar} \cdot \frac{(T_C)_i}{(T_C)_{Ar}} \tag{8}$$

$$(b_o)_i = (b_o)_{Ar} \cdot \frac{(V_C)_i}{(V_C)_{Ar}} \tag{9}$$

em que

$$b_o = \frac{2}{3}\,\pi\, N\, \sigma^3 \tag{10}$$

Os parâmetros de potencial do árgon foram tirados de **[9]** para os diversos potenciais e os valores utilizados estão presentes na Tabela I. As constantes críticas dos diversos gases foram obtidas em (12). Para o potencial de Kihara foi admitido $\gamma_{Kr} = 0{,}1$ e $\gamma_{CH_4} = 0{,}3$, valores das entradas das tabelas dos integrais de colisão do potencial de Kihara **[13]**, que mais se aproximavam dos parâmetros obtidos por TEE et al **[14]**.

4. RESULTADOS OBTIDOS

4.1. Gases puros

Após terem sido obtidos os parâmetros moleculares de cada gás para os diferentes gases, calcularam-se os valores da viscosidade teórica para o Kr, N_2 e CH_4, bem como da condutibilidade térmica e do coeficiente de autodifusão do Kr e da condutibilidade térmica do metano.

Os valores experimentais da viscosidade dos gases foram tirados da análise de MAITLAND e SMITH **[15]** não sendo valores experimentais «stricto sensu» mas valores obtidos dum ajuste de mínimos quadráticos dos resultados experimentais existentes até à data e cobrem os seguintes intervalos de temperaturas:

		máximo erro em relação aos valores experimentais:
Kr	$140\ K < T < 2000\ K$	$\pm$ 1,0 %
N_2	$100\ K < T < 2000\ K$	$\pm$ 1,5 %
CH_4	$100\ K < T < 1000\ K$	$\pm$ 1,3 %

A razão f_λ/f_η varia pouco com a temperatura e com o tipo de potencial e segundo KESTIN **[16]** pode ser dada por:

$$\mathcal{F}(T^*) = \frac{f_\lambda}{f_\eta} = 1 + 0{,}0042\ [1 - \exp(0{,}33\,(1 - T^*))] \qquad (12)$$

Para a gama de temperatura utilizada a função $\mathcal{F}(T^*)$ não se afasta da unidade mais de 0,3 %, pelo que não foi utilizada nos cálculos, pois os resultados experimentais utilizados para comparação têm um erro estimado em 1 %.

No caso do metano, dado tratar-se de uma molécula poliatómica, torna-se necessário aplicar uma equação para a condutibilidade térmica que entre em linha de conta com a possibilidade de existência de colisões inelásticas. A primeira tentativa de cálculo da condutibilidade térmica dum gás poliatómico deve-se a EUCKEN **[17]**, tendo a expressão que este autor deduziu sido modificada por UBBELOHDE **[18]** admitindo que a energia dos graus de liberdade rotacionais e vibracionais é permutada segundo um processo difusional. A expressão proposta por estes autores, válida normalmente para altas temperaturas é:

$$\left(\frac{\lambda M}{\eta C_V}\right)_U = 1{,}77\,\frac{R}{C_V} + 1{,}32 \qquad (13)$$

MASON e MONCHICK **[8]** propuseram uma teoria mais correcta, mas a dificuldade em obter valores do parâmetro Z_{rot} levou-nos a aplicar numa primeira fase, a equação de EUCKEN modificada **[18]**, equação (13), e posteriormente a teoria de MASON e MONCHICK.

TABELA I

Parâmetros moleculares do Ar, Kr, N_2 e CH_4 determinados pelo método das isotérmicas a partir de dados de viscosidade e a partir do princípio de estados correspondentes, para os potenciais de Lennard-Jones 6-12, Kihara e Dymond-Alder

GÁS	LENNARD-JONES 6-12				KIHARA			DYMOND-ALDER			
	Dados $\eta(T)$		P. E. C		P. E. C.			Dados $\eta(T)$		P. E. C	
	$\varepsilon/k/K$	σ/nm	$\varepsilon/k/K$	σ/nm	$\varepsilon/k/K$	σ/nm	γ	$\varepsilon/k/K$	σ/nm	$\varepsilon/k/K$	σ/nm
Ar	120,72	0,3434	—	—	143,26 (14)	0,3344 (14)	0,111 (14)	138,2 (10)	0,328 (10)	—	—
Kr	205,0	0,350	—	—	199,0	0,357	0,1	—	—	192,0	0,350
N_2	108,4	0,360	—	—	—	—	—	115,0	0,346	—	—
CH_4	—	—	152,5	0,377	232,2 (14)	0,351 (14)	0,28 (14)	174,0	0,360	174,7	0,360

NOTAS: 1. Os números entre parêntesis referem-se à bibliografia donde foram tirados os valores para o caso do árgon, tomado como referência no método do P. E. C.
2. Para o metano os parâmetros obtidos pelo P. E. C. para o potencial de Kihara eram bastante diferentes dos tabelados (14) pelo que utilizámos os valores de TEE et al (14).

Os valores experimentais da condutibilidade térmica do crípton foram obtidos das tabelas de VARGAFTIK **[20]**.

Os valores teóricos para a condutibilidade térmica do crípton foram obtidos a partir das equações 1 e 2 que podem ser combinadas na equação (11):

$$\lambda = \frac{15}{4}\,\frac{R}{M}\,\eta\,.\,\frac{f_\lambda}{f_\eta} \qquad (11)$$

na medida em que para um gás monoatómico $C_V = \frac{3}{2}R$.

A equação de MASON e MONCHICK [8] introduz o parâmetro Z_{rot} que é o número de colisões necessárias para haver permuta da energia rotacional e translacional, e traduz-se por:

$$\left(\frac{\lambda M}{\eta C_V}\right)_{MM} = \left(\frac{\lambda M}{\eta C_V}\right)_U - \frac{2{,}784}{\pi C_V} \cdot \frac{C_{rot}}{Z_{rot}} \qquad (14)$$

em que C_{rot} é a contribuição rotacional para o calor específico do gás ($\frac{3}{2}$ R para o metano).

Na ausência de valores experimentais de Z_{rot}, ele funciona como um parâmetro ajustável.

Os valores experimentais da condutibilidade térmica do metano foram obtidos de (19) e os do coeficiente de autodifusão de (20).

Os resultados obtidos para os diferentes modelos de potencial e para as diversas propriedades de transporte foram representados na forma de percentagem de afastamento do valor teórico do valor experimental, isto é:

$$\% \text{ erro} = \frac{X \text{ teórico} - X \text{ experimental}}{X \text{ experimental}} \times 100\,\% \qquad (15)$$

e apresentam-se nas figuras 3, 4 e 5 e nas tabelas II e III.

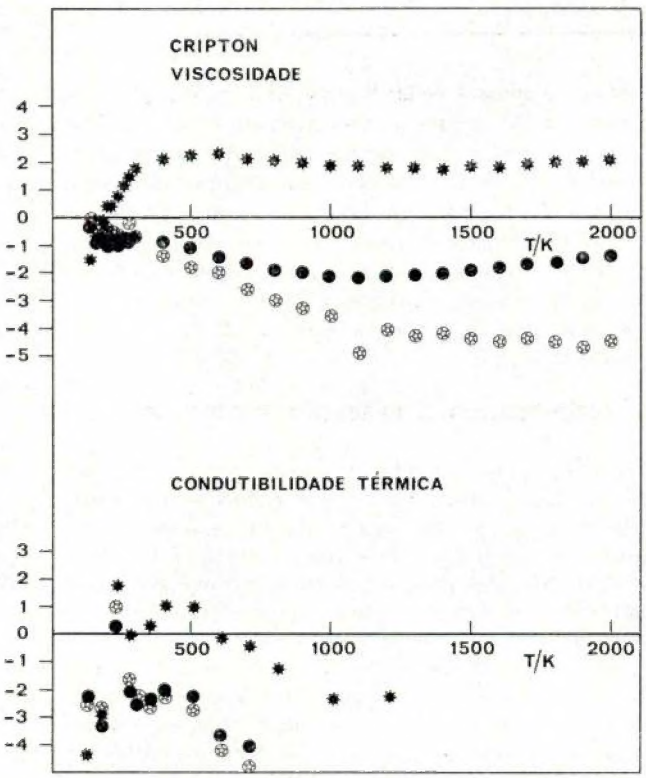


FIG. 3

Viscosidade e condutibilidade térmica do cripton segundo o potencial de Lennard-Jones — ✱ , de Dymond-Alder — ● , e de Kihara — ⊛ . Comparação com os resultados experimentais

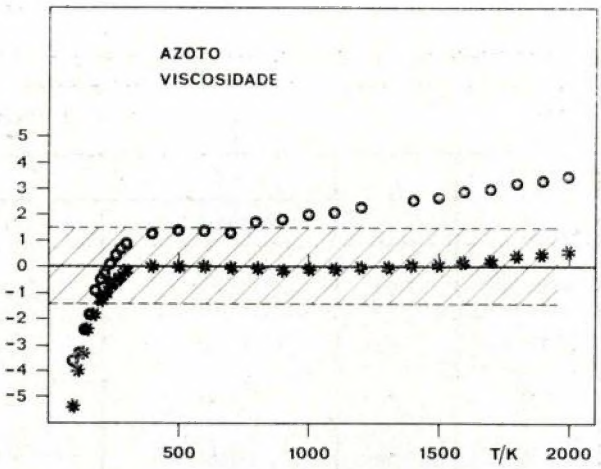


FIG. 4

Viscosidade do azoto segundo o potencial de Lennard-Jones — ✱ e de Dymond-Alder — ○ . Comparação com os resultados experimentais

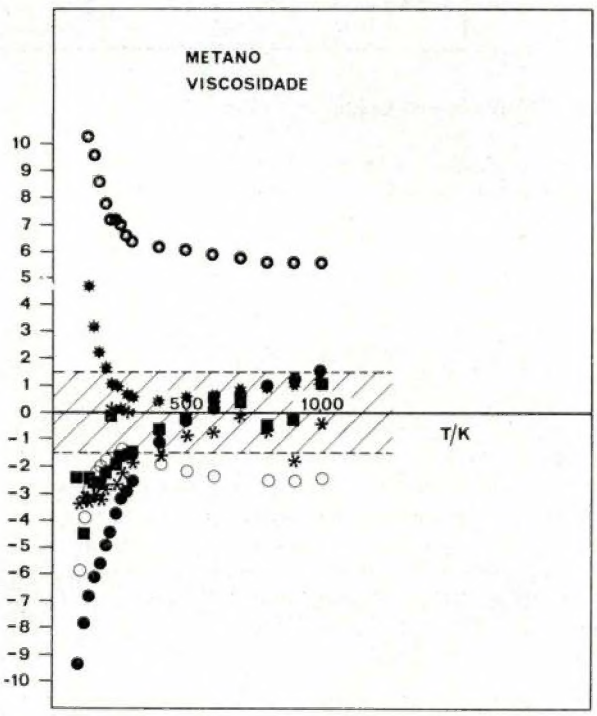


FIG. 5

Viscosidade do metano segundo os seguintes potenciais:
○ — Lennard-Jones, parâmetros citados na Tabela I (P. E. C.)
● — Lennard-Jones, outros parâmetros (P. E. C.)
✱ — Dymond-Alder, método das isotérmicas
■ — Dymond-Alder, (P. E. C.)
✱ — Kihara, parâmetros da referência (14)
○ — Kihara, (P. E. C.)

TABELA II

Condutibilidade térmica do CH_4 gasoso segundo o modelo de Lennard-Jones (6-12) e comparação com os resultados experimentais [20], para p=1 atm. Os cálculos foram efectuados pela equação de UBBELHODE e de MASON e MONCHICK, com Z_{rot} = 1,06

T/K	T*	λ/mWm⁻¹K⁻¹		λ exp/mWm⁻¹K⁻¹ (20)	% erro	
		UBBELHODE	MASON/MONCHICK		eq(13)	eq(14)
335,6	2,20	46,18	38,31	38,31	20,5	0,0
371,3	2,43	52,59	44,05	44,00	19,5	0,1
403,8	2,65	58,66	49,53	51,12	14,7	−3,1
435,6	2,86	64,64	54,97	53,59	20,6	+2,6

TABELA III

Coeficiente de autodifusão do CH_4 gasoso segundo o modelo de Lennard-Jones (6-12) e comparação com os resultados experimentais [21], para p=1 atm

T/K	T*	$10^5 D/m^2 s^{-1}$	$10^5 D_{exp}/m^2 s^{-1}$	% erro
273,16	1,79	1,86	2,06	−9,7
298,16	1,96	2,19	2,40	−8,8

4.2. Mistura Argon-Crípton

O coeficiente de difusão mútua do argon em crípton foi calculado através da expressão de Chapman-Enskog **[3]**:

$$D_{12}/cm^2\,s^{-1} = 2{,}628\times10^{-3}\,\frac{\sqrt{T^3\,(M_1+M_2)/M_1\,M_2}}{(p/atm)\,\sigma_{12}^2\,\Omega^{(1,1)}(T^*_{12})}\,f_D(T^*_{12}) \qquad (15)$$

em que M_i é a massa molecular do constituinte i, e a expressão já está preparada para utilizar o valor da pressão p em atmosferas. Para podermos aplicar a equação (15) necessitamos dos valores das constantes de força σ_{12} e ε_{12}/k para a interacção árgon-crípton. Num primeiro passo testaram-se as regras de combinação de Lorentz (eq. (16)) e Berthelot (eq. (17)), que vêm dadas por:

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\,(\sigma_1 + \sigma_2) \qquad (16)$$

$$\varepsilon_{12}/k = \sqrt{\varepsilon_1/k\,.\,\varepsilon_2/k} \qquad (17)$$

utilizando os valores dos parâmetros do árgon e do crípton constantes da Tabela I, para o caso do modelo de Lennard-Jones, tendo-se obtido ε_{12}/k = 157,3 K e σ_{12} = 0,347 nm. Os valores obtidos podem comparar-se com os parâmetros deduzidos por KESTIN et al **[21]** para o potencial de Lennard-Jones a partir do ajuste aos valores experimentais dos coeficientes de difusão, respectivamente 171,67 K e 0,3408 nm, o que será feito na secção seguinte. Para ambos os pares de parâmetros foi calculado o valor do coeficiente de autodifusão no intervalo de temperaturas 200-1000 K que se comparou com os valores experimentais acessíveis **[20]**. Os resultados obtidos estão representados na figura 6.

5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

A teoria de CHAPMAN-ENSKOG é, como se refere na introdução, válida para gases monoatómicos, sendo uma teoria exacta caso seja conhecido o verdadeiro potencial intermolecular, o que não acontece na realidade.

Para a crípton, uma vez determinados um conjunto de parâmetros ε/k e σ, consistente com um dado modelo de potencial, a partir de uma propriedade, as outras propriedades de transporte podem ser calculadas com uma exactidão razoável. O afastamento dos valores calculados em relação aos valores experimentais traduzem a imperfeição do modelo de potencial e as suas limitações em traduzir o verdadeiro potencial intermolecular.

Assim, dos três modelos de potencial utilizados para o crípton, apenas para o modelo de Lennard-Jones se determinaram os parâmetros duma forma absoluta (método das rectas isotérmicas), verificando-se que a viscosidade é sobestimada em 2 % em todo o intervalo de

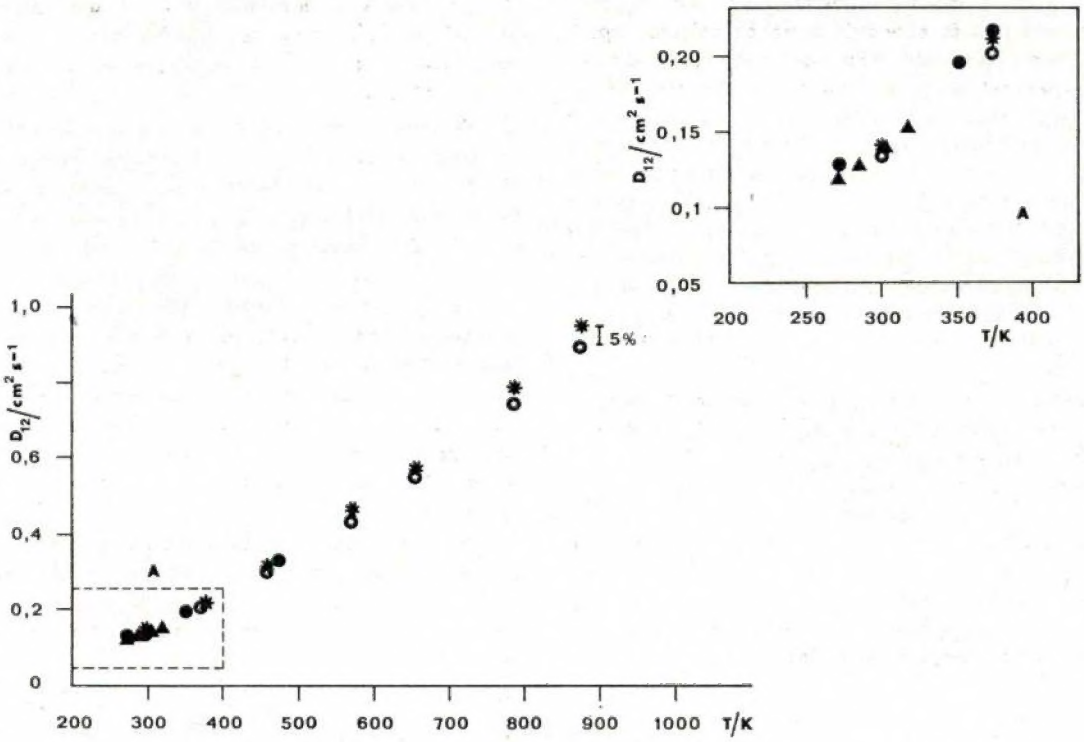


FIG. 6

Coeficiente de difusão mútua da mistura argon-cripton.
o — Lennard-Jones com regras de combinação
* — Lennard-Jones, parâmetros de Kestin et al (21)
▲ — Valores experimentais (22)
● — Valores experimentais (23)

temperaturas utilizado, enquanto que a exactidão dos valores experimentais utilizados é de $\pm 1\,\%$. A condutibilidade térmica é reproduzida pelo modelo de Lennard-Jones a $\pm 1\,\%$ para $273 < T < 800$ K divergindo a baixas e altas temperaturas. Os potenciais de Kihara e Dymond-Alder subestimam os valores da codutibilidade térmica, aumentando o afastamento com a temperatura. Para os potenciais de Dymond-Alder e Kihara foram utilizados parâmetros relativos calculados pelo princípio dos estados correspondentes, sendo a concordância razoável (—1,5 %) para o potencial Dymond-Alder no caso da viscosidade (só determinado com valores de propriedades do árgon), embora para o potencial de núcleo rígido de Kihara o desvio aumente com a temperatura.

O azoto é uma molécula diatómica com uma energia rotacional elevada pelo que se comporta praticamente como esférica (valores absolutos pequenos do 2.° coeficiente de virial, por exemplo). Sendo assim, não é de espantar o excelente acordo obtido para o potencial de Lennard-Jones, com os parâmetros consistentes com a propriedade para a qual foram ajustados. Salienta-se, contudo, a sua capacidade em reproduzir os dados experimentais da viscosidade a menos de 0,3 % num intervalo de temperaturas enorme (300 a 2000 K). No caso do potencial de Dymond-Alder este acordo já não se verifica para o conjunto de parâmetros utilizados, calculados pelo princípio de estados correspondentes.

Para o metano, a molécula globular, de cume simétrico, mais simples, qualquer dos potenciais moleculares utilizados reproduz os dados da viscosidade a $\pm 2\,\%$ no intervalo de temperaturas estudado (300 a 1000 K), divergindo grandemente para baixas temperaturas onde a importância das forças repulsivas se torna preponderante. A única excepção é o potencial de Kihara com parâmetros moleculares determinados pelo princípio de estados correspondentes em que o afastamento entre os valores calculados e os experimentais é grande (6 %).

No que se refere à condutibilidade térmica e ao coeficiente de autodifusão (Tabelas II e III) apenas foi testado o modelo de Lennard-Jones; a equação de UBBELOHDE **[19]** sobrestima em cerca de 20 % o valor da condutibilidade térmica do metano e subestima em 10 % o coeficiente de autodifusão o que pode ser devido ao facto de os parâmetros do metano terem sido calculados pelo princípio dos estados correspondentes, facto aliás suportado pelo cálculo do coeficiente de autodifusão (10 % de desvio).

No entanto, a equação de EUCKEN modificada sobrestima normalmente os valores da condutibilidade térmica de gases poliatómicos simples, como por exemplo para o CF_4 **[9]**. A utilização da equação de MASON e MONCHICK, com a aproximação $\rho\, D/\eta \sim 1{,}32$ **[9]**, com o valor de $Z_{rot} = 1{,}06$, reproduz bastante bem a condutibildade térmica do metano no ntervalo de temperaturas estudado.

No caso da mistura árgon-cripton, como se pode verificar na figura 6, o acordo entre os valores experimentais e os calculados pelo modelo de Lennard-Jones com os parâmetros da mistura calculados segundo as regras de Berthelot e Lorentz, na zona em que existem dados experimentais, é excelente. Para temperaturas mais elevadas não existem dados experimentais acessíveis e só se pode comparar os resultados obtidos com os resultados teóricos para o modelo de Lennard-Jones obtidos por KESTIN et al **[21]**, com cálculo dos parâmetros ε e σ a partir da viscosidade da mistura. O afastamento entre os dois conjuntos de resultados teóricos aumenta com a temperatura, sendo de cerca de 5 % à temperatura de 900 K.

Podemos assim concluir que a utilização de parâmetros moleculares determinados a partir de dados de viscosidade, independentemente do modelo de potencial intermolecular utilizado, é um processo rápido e expedito de previsão de propriedades de transporte dos gases à pressão normal, divergindo no entanto os cálculos para as temperaturas baixas ($T < 250$ K). A utilização dos parâmetros determinados pelo método das isotérmicas conduz a resultados bastante razoáveis para todos os potenciais o que atesta a consistência interna do método. Os parâmetros determinados a partir das relações do princípio de estados correspondentes dão resultados piores, devido à simplicidade das relações utilizadas para a sua estimativa.

Posteriormente à realização prática deste trabalho, chegaram ao conhecimento dos autores valores dos parâmetros moleculares determinados a partir de técnicas de inversão **[25]**, **[26]** e para o caso dos gases raros, a partir dos trabalhos de BARKER **[27]**, calculados a partir de dados experimentais de várias propriedades, nos estados sólidos, líquido e gasoso. Os valores obtidos duma forma absoluta por estes autores estão representados na Tabela IV e pode-se verificar o acordo bastante bom entre os valores de σ para as diferentes moléculas correspondentes ao potencial de Lennard-Jones, incluindo a mistura árgon-cripton, embora para a dimensão do fosso de potencial o afastamento seja ligeiramente maior.

Dada a facilidade de cálculo de parâmetros inerentes ao método das rectas isotérmicas, recomendamos a sua utilização para estimativa rápida de parâmetros, para todos os problemas em que se requer uma precisão elevada.

TABELA IV

Parâmetros moleculares obtidos por diferentes métodos e sua comparação com os calculados no presente trabalho

	LENNARD-JONES 6-12		DYMOND-ALDER		MÉTODO DE BARKER [27]		TÉCNICAS DE INVERSÃO (24-26)	
	ε/k/K	σ/nm	ε/k/K	σ/nm	ε/k/K	σ/nm	ε/k/K	σ/nm
Kr	205,0	0,350	—	—	201,9	0,357	199,2 (b)	0,359 (b)
N_2	108,4	0,360	115,0	0,346	—	—	—	—
CH_4	—	—	174,0	0,360	—	—	217 (b)	0,356 (b)
Ar-Kr	157,3 (a) 171,7 (d)	0,347 (a) 0,348 (d)	—	—	169,4 (a)	0,346 (a)	165 (c)	0,349 (c)

(a) — regras de Berthelot e Lorentz
(b) — SMITH et al [24-25]
(c) — G. C. MAITLAND, W. A. WAKEHAM [26]
(d) — KESTIN et al [21]

6. BIBLIOGRAFIA

[1] — **D. Enskog**, Phys, Zeit., **12**, 56 (1911); ib. **12**, 333 (1911).

[2] — **D. Enskog**, Ann. Phys., **38**, 73 (1912).

[3] — **S. Chapman, T. G. Cowling**, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 3.ª ed., Cambridge University Press (1970).

[4] — **E. B. Smith**, Physica, **73**, 211 (1974).

[5] — **D. W. Gough, G. C. Maitland, E. B. Smith**, Mol. Phys., **24**, 151 (1972).

[6] — **D. W. Gough, E. B. Smith, G. C. Maitland**, Mol. Phys., **27**, 867 (1974).

[7] — **G. C. Maitland**, Mol. Phys., **20**, 513 (1973).

[8] — **E. A. Mason, L. Monchick**, J. Chem. Phys., **36**, 1622 (1962).

[9] — **T. M. Reed, K. E. Gubbins**, *Applied Statistical Mechanics*, ed. McGraw Hill (1973).

[10] — **J. H. Dymond, B .J. Alder**, J. Chem. Phys., **51**, 309 (1969).

[11] — **C. A. Nieto de Castro**, *Tópicos de Termodinâmica Estatística*, ed. AEIST (1974).

[12] — **R. C. Reid, T. K. Sherwood,** *The Properties of Gases and Liquids*, 2.ª ed. McGraw (1966).
[13] — **J. A. Barker, W. Fock, F. Smith,** Phys. Fluids, **7**, 897 (1964).
[14] — **L. S. Tee, S. Gotoh, W. E. Stewart,** Ind. Eng. Chem. Fund., **5**, 356 (1966).
[15] — **G. C. Maitland, E. B. Smith,** J. Chem. Eng. Data, **17**, 150 (1972).
[16] — **J. Kestin,** Proc. 14th Conf. on Thermal Conductivity, 315 (1975).
[17] — **A. Eucken,** Phys. Z., **14**, 324 (1913).
[18] — **A. R. Ubbelohde,** J. Chem. Phys., **3**, 219 (1935).
[19] — **B. M. Rosembaum, G. Thodos,** J. Chem. Phys., **51**, 1361 (1969).
[20] — **N. B. Vargaftik,** *Tables on the Thermophysical Properties of Liquids and Gases*, 2.ª ed. John Wiley & Sons, Washington (1975).
[21] — **J. Kestin, W. Wakeham, K. Watanabe,** J. Chem. Phys., **53**, 3773 (1970).
[22] — **B. N. Srivastava, K. P. Srivastava,** J. Chem. Phys., **30**, 984 (1959).
[23] — **K. Schäfer, K. Schuhman,** Z. Elektrochem., **61**, 246 (1951).
[24] — **G. C. Maitland, E. B. Smith,** Chem. Phys. Letts., **22**, 443 (1973).
[25] — **G. P. Mattews, E. B. Smith,** Mol. Phys., **32**, 1719 (1976).
[26] — **G. C. Maitland, W. A. Wakeham,** in *Pair Interactions Between Molecules*, Faraday Division Symposium, March/April, A London, 1977.
[27] — **J. A. Barker,** in *Pair Interactions Between Molecules*, Faraday Division Symposium, March/ /April, A London, 1977.

NOTICIÁRIO

(Continuação da pág. 144)

FEIRA DE LEIPZIG — REPÚBLICA DEMOCRÁTICA ALEMÃ — 9/3-15/3 — 1980

Contactos a nível mundial para um comércio pleno de êxito...

...são-vos oferecidos pela Feira de Leipzig.

Leipzig cria para si as melhores possibilidades para uma troca de experiências e comparação de resultados, especialmente nos campos da construção de máquinas e instalações, da metalurgia, da electrotécnica/electrónica, da construção civil e, ainda, no campo dos bens de consumo.

Uma informação actual a **nível internacional** através de simpósios, colóquios e conferências especializadas.

Esperamos por si em Leipzig!

Informações adicionais e Cartões de Visitante poderão ser obtidos na
Embaixada da República Democrática Alemã — Departamento Comercial
Rua Barão de Sabrosa, 213 — Lisboa

bem como em qualquer posto de fronteira da Repúblca Democrática Alemã.

(Informação do «Expresso», de 9-2-1980)

ACÇÕES DE FORMAÇÃO/1980 — CALENDÁRIO DAS ACÇÕES INTEREMPRESAS

Cursos em Lisboa:

Aperfeiçoamento de Preparadores e Encarregados — Início em 10 de Março. Duração: 10 dias.
Gestão da Produção — Início em 7 de Abril. Duração: 5 dias.
Téc. Lubrifcação Órgãos de Máquinas — Início em 14 de Abril. Duração: 3 dias.
Organização de Armazéns e Gestão de Stocks — Início em 5 de Maio. Duração: 5 dias.

Cursos no Porto:

Organização da Conservação — Início em 25 de Fevereiro. Duração: 5 dias.
Organização da Lubrificação — Início em 3 de Março — Duração: 3 dias.
Informática Operacional na Área Técnica — Início em 10 de Março. Duração: 5 dias.

DEPARTAMENTO DE FORMAÇÃO — Rua Bernardo Lima, 48-1.º — LISBOA
Telefones: 55 46 95/57 93 77.

(Informação do «Expresso», de 9-2-1980)

(Continua na pág. 188)

PRODUTOS DE QUALIDADE

YTONG

- **BLOCOS**

  DENSIDADE - 0,5
  TOLERÂNCIA DIMENSIONAL - ± 1 mm
  RESISTÊNCIA (COMPRESSÃO) - 30 kg/cm²
  RESISTÊNCIA AO FOGO - SUPERIOR A 4 HORAS (A 240)
  MÓDULO ELASTECIDADE - 17.000 kg/cm²
  ISOLAMENTO TÉRMICO - $\lambda p = 0{,}15$ kcal/mh °C

- **COLAS**

  UTILIZAÇÃO - ALVENARIA YTONG E AZULEJOS
  RESISTÊNCIA (TRACÇÃO) ≥ SUPERIOR AO YTONG

- **PAVIMENTO ALIGEIRADO**

  VÃO MÁXIMO - 9,00 METROS
  CARGA MÁXIMA - 500 Kg/m²
  PESO - 10 A 30% INFERIOR AO TRADICIONAL
  ISOLAMENTO TÉRMICO - $\lambda p = 0{,}20$ kcal/mh °C
  RESISTÊNCIA AO FOGO - SUPERIOR A 2 HORAS (A 120)
  ACABAMENTO - IGUAL ÀS ALVENARIAS YTONG.

- **FORRAS TÉRMICAS**

  DENSIDADE - 0,4 E 0,5
  ESPESSURA - 7,5 cm
  ISOLAMENTO TÉRMICO - $\lambda p = 0{,}15$ kcal/mh °C

YTONG PORTUGUESA E. N. N.º 10 Km 17 Telefs: 201 99 06/7/8/9 COINA

N YT R. do Passeio Alegre, 840 Telef.: 68 04 64 PORTO

Relatório sobre a disciplina
SISTEMAS DE CONTROLO E DE COMUNICAÇÃO*
do 5.º ano do Curso de Engenharia Electrotécnica do Instituto Superior Técnico [1]
Janeiro, 1978

JOSÉ MANUEL FONSECA DE MOURA
Universidade Técnica de Lisboa (I.S.T.)
Centro de Análise e Processamento de Sinais (I.N.I.C.)

SUMÁRIO

Estuda-se neste relatório a disciplina Sistemas de Controlo e de Comunicação do grupo «Análise e Teoria dos Sistemas» do curso de Engenharia Electrotécnica. Começa-se por reflectir sobre o âmbito da Teoria dos Sistemas, especificando para o grupo de disciplinas as matérias afins e o espírito prevalecente. Percorre-se depois sumariamente aspectos do ensino da Teoria dos Sistemas no curso de Engenharia Electrotécnica no IST, nomeadamente no seu Departamento de Teoria dos Sistemas. Finalmente discute-se a natureza da disciplina de Sistemas de Controlo e de Comunicação concretizando-se o respectivo programa, o conteúdo, métodos de ensino e aspectos bibliográficos.

ABSTRACT

The paper presents Control and Communication Systems, a subject of the group «Analysis and Theory of Systems» of the Electrical Engineering program. If starts out by reflecting on the nature of Systems Theory itself, specifying for the above group of subjects its contents and prevailing attitude. The report then summarizes aspects of the teaching of Systems Theory in the Electrical Engineering Course at IST, namely at its Systems Theory Department. Finally, the paper discusses Control and Communication Systems presenting its programm, its contents, the pedagogical methods used and the required bibliography.

1. Teoria dos Sistemas: Uma Classificação

Nos anos 40 Norbert Wiener propôs [1] que se baptisasse de Cibernética uma nova ciência, síntese de diferentes disciplinas como o Controlo e a Comunicação em diversos campos de aplicação. A figura 1 representa em diagrama um possível retrato na época da génese da Cibernética. A Cibernética é a tomada de consciência da unidade prevalecente nos Computadores, no Controlo, na Comunicação e vai construir-se basicamente sobre a Electrónica que, constituindo o suporte material tecnológico dos sistemas noutros campos, lhes impõe uma dinâmica acelerada de transformação que, rapidamente, desactualiza a fotografia anterior. Sobre uma perspectiva desta evolução ver a Parte I de [2].

Com toda a subjectividade inerente a qualquer sistema de classificação, propõe-se, como actualização nos anos 70 da mesma preocupação de Norbert Wiener, o esquema que se desdobra pelas figuras 2 a 8. O contraste entre os dois diagramas reflecte a interpenetração, a expansão e o ressurgimento decisivo de novas disciplinas e ciências.

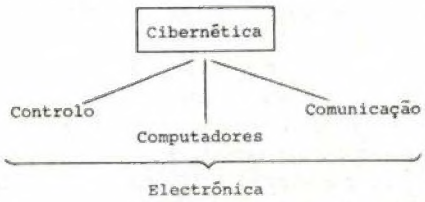


FIG. 1

Cibernética de Norbert Wiener

(1) De acordo com o artigo 9.º, parágrafo 1, alínea a) do decreto n.º 301/72 de 14 de Agosto.

* **Manuscrito recebido para publicação em 7-6-78.**

Como nó central na figura 2 aparece a Teoria dos Sistemas. Deste emergem três ramificações que isolamos em qualquer aplicação:

i) Compreensão dos fenómenos físicos subjacentes à experiência e sua teorização.

ii) Implementação e seus aspectos tecnológicos, onde se singulariza a Electrónica como principal e mais fecundo meio de implementação.

iii) Processamento, entendido como conjunto de classes formais de operações comuns a diferentes contextos físicos e implementações. Inclui o estabelecimento e análise do modelo formal e a síntese das acções de intervenção. Ou, dito de outra maneira, corresponde ao estudo e ao projecto formal dos sistemas e sinais que interactuam na experiência.

FIG. 2

Teoria dos Sistemas: Suas Ramificações

Às duas primeiras categorias são inerentes os conceitos de energia e de matéria. Na terceira é a informação, e o seu fluxo, formalizados por Shannon em 1948 [3]. As duas primeiras preocupações são por isso o objecto privilegiado de disciplinas decorrentes da Física, da Química, enquanto o processamento tem paladar de natureza formal, ou seja, matemático.

Um Exemplo: Antes de prosseguir, esclarece-se o diagrama proposto com uma breve discussão centrada no contexto da Comunicação. Este vocábulo aparece tradicionalmente associado à transmissão a distância (telecomunicação) de mensagens escritas, orais ou visuais, em que o homem é num extremo a fonte e no outro o destinatário. Nesta acepção a expressão é associada aos grandes sistemas de comunicação historicamente desenvolvidos — o telégrafo, o telefone e a telefonia (rádio), a televisão.

A figura 3 ilustra em esquema de blocos um sistema de Comunicação. O mesmo meio físico, p.e. na rádio e na televisão, transmite mensagens de diversa natureza. O mesmo tipo de mensagens, p.e. no radar e no sonar, pode ser propagado por suportes físicos diferentes. Nestes dois últimos exemplos o canal de transmissão, bloco central da figura 3 a), é o espaço livre ou o canal sonoro do oceano, respectivamente. Em qualquer deles se observa o fenómeno da propagação. Mas, ao radar, interessam os fenómenos electromagnéticos, objecto de estudo do Electromagnetismo, enquanto ao sonar as ondas e a sua propagação são de outra natureza, do domínio da Acústica. A especificidade dos fenómenos físicos determina o tipo de interface (ver a figura 3-b) entre os blocos iniciais do emissor e o canal, pelo que os hidrofones dum sonar se distinguem inequivocamente dos dipolos duma parabólica.

Nos exemplos anteriores é possível isolar operações que abstraiem da natureza da mensagem, da sua fonte,

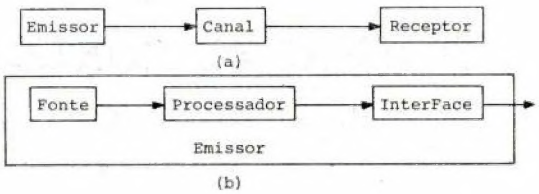


FIG. 3

a) **Sistema de Comunicação;** b) **Emissor**

do suporte físico do meio de transmissão, do destinatário. É o processamento que relaciona o conteúdo informativo com a dinâmica dos fenómenos, i.e., com as variações no tempo dos fenómenos observáveis. A natureza (física) do problema implica com os factores de ordem técnica de implementação. Mas, a determinado nível de abstracção, há uma sucessão de operações, conceptualmente equivalente, independentes da natureza do canal. O processamento surge, a este nível, desvinculado do meio físico subjacente.

A universalidade no exemplo anterior é bem mais lata e ultrapassa o âmbito de diferentes aplicações no mesmo campo. De facto, o processamento, tal como entendido acima, pode ser isolado como fase intermédia em aplicações em campos totalmente diversos. Passa-se da Comunicação (na acepção tradicional) para a Economia, para a Biologia, para a Química, para a Gestão de «stocks», etc. Para ilustrar a interpenetração do formalismo emergente da Comunicação noutras áreas, refiram-se, por exemplo, os estudos de qualidade de água, em que a mensagem a extrair é modulada (pela natureza) em parâmetros característicos como sejam, entre outros, o oxigénio dissolvido e a procura bioquímica de

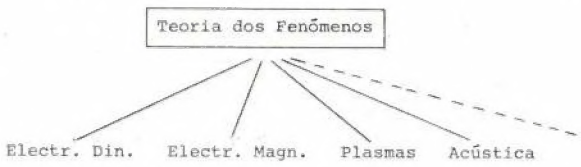


FIG. 4

Teorias dos Fenómenos Físicos Subjacentes

oxigénio, e depois processada numa estação de tratamento de águas. O homem como fonte, o homem como destinatário, desapareceu do ciclo de fluxo da informação.

As figuras 4 e 5 ilustram alguns dos temas e disciplinas abrangidos nas ramificações Teoria dos Fenómenos e Tecnologia consideradas na figura 2. As listagens apresentadas privilegiam ramos de conhecimento tradi-

cionalmente ligados à engenharia electrotécnica. Com a diversificação das aplicações, a Teoria dos Fenómenos alarga-se para incluir, além de Ciências já referidas, outras como a Meteorologia, a Economia, a Linguística, etc. Acentua-se que na figura 5 se consideram apenas tecnologias referentes à implementação «hardware» dos sistemas. A implementação «software» é aqui considerada como capítulo duma ciência nova, a Ciência dos Computadores.

Na figura 6 consideram-se disciplinas típicas no processamento. Como questão central apresenta-se a abstracção de modelos e suas representações formais.

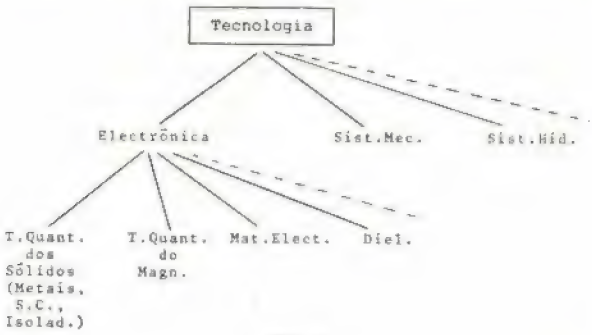


FIG. 5

Tecnologia

No âmbito do formal, numerosos são os tópicos que, pelo seu desenvolvimento actual, se autonomizaram em disciplinas, de elevado grau de abstracção e formalismo, como a Optimização, a Programação Matemática, a Identificação, etc. Estas disciplinas concorrem em domínios fundamentais das aplicações cuja nomenclatura é mais tradicional, como o Projecto de Circuitos, o Controlo, a Comunicação, etc. Estes incluem na figura 6, caminhando para a especialização e mais perto do real, disciplinas típicas como sejam no Controlo, os Servomecanismos, o Controlo Óptimo, a Investigação Operacional e na Comunicação, a Teoria Estatística da Comunicação, os Sistemas de Comunicação, etc. O suporte matemático encontra-se em ramos como a Análise (Variável Real, Variável Complexa, Funcional, etc.), a Teoria das Probabilidades e Processos Estocásticos, a Álgebra (Linear, Moderna, etc.), as Matemáticas Aplicadas (Cálculo Operacional, Análise Numérica, Equações Diferenciais, etc.).

Há tópicos que, mercê de circunstâncias várias, embora interpenetrando os desenvolvimentos anteriores, se especializaram no seu âmbito, nas suas preocupações, no seu formalismo, de tal modo que merecem uma referência autónoma divergente. Na figura 6 menciona-se, por exemplo, o Processamento Digital. Esta disciplina, recente (um dos primeiros livros a ela dedicada data de 1968, **[4]**, constitui hoje campo de actividade fértil que atingiu elevado grau de maturação revelado quer pelas revistas técnicas especializadas, p.e. **[5]**, quer pelos numerosos livros já publicados, p.e. **[6]**, **[7]**, **[8]**.

Um tópico fundamental no processamento é constituído pelos algoritmos e pela sua teoria. Os algoritmos representam a solução do problema, não como uma fórmula analítica (de significado nem sempre transparente), mas como uma rotina de operações que a exprimem em termos dum conjunto de números (tabela, gráfico). Os algoritmos, uma vez programados num computador, traduzem uma implementação, da acção projectada, dum tipo novo — a implementação software. Do ponto de vista conceptual, e em termos do utilizador, esta implementação atinge os mesmos objectivos que podem ser atingidos pela implementação hardware, noutros contextos. O utilizador pode adoptar em relação a ela a mesma atitude, de caixa negra, que adopta muitas vezes em relação a uma implementação hardware, nomeadamente a atitude de se saber servir dela, saber utilizá-la, mesmo que não conheça, em pormenor, o seu funcionamento interno. A Teoria dos Algoritmos tem conhecido um incremento sempre

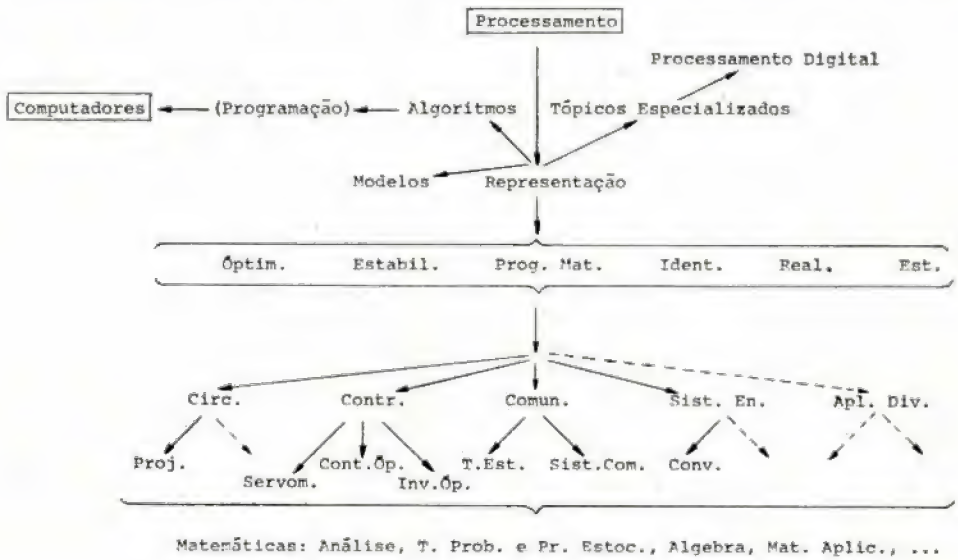


FIG. 6

Tópicos no Domínio do Processamento

crescente, incluindo tópicos como a sua representação e implementação (fluxogramas, estruturas de controlo, sincronia e assincronia, etc.), algoritmos de natureza aritmética (multiplicação, factorização com inteiros e polinómios, teste de números primos, avaliação de máximo divisor comum de polinómios), métodos matriciais, resolução de equações algébricas e diferenciais. Na escolha do algoritmo a implementar há que atender a factores como a convergência, erros associados, memória ocupada, etc.

A figura 6 ilustra a relação, através dos algoritmos, considerados como implementação software das acções programadas, entre o processamento e a Ciência que é, talvez, o símbolo dominante da sociedade tecnológica — a Ciência dos Computadores. Os computadores, que vão buscar as suas raízes nos anos 40 a problemas bem concretos e a necessidades bem reais das aplicações, abandonam a fronteira difusa do interface com as outras ciências e constituem-se num ramo próprio em expansão complexa e acelerada, ver a figura 7. Como imagem com-

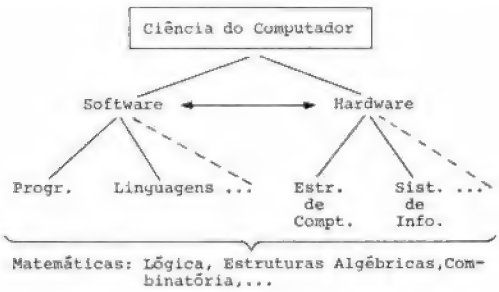


FIG. 7

Ciência do Computador

pare-se a génese de novas ciências, a partir de uma ramificação comum, à multiplicação, por cissiparidade da célula, na Biologia. Este fenómeno aliás continua a manifestar-se como é exemplo recente a engenharia de software.

Na figura 7 desdobrou-se a Ciência do Computador em dois ramos básicos. No ramo de Hardware incluem-se, por exemplo, problemas como: i) estruturas de computação, i.e., arquitecturas do computador para projecto de hardware capaz de suportar determinadas características de software desejadas; ii) sistemas de informação em que sobressaiem problemas relacionados com o objectivo de acesso a uma comunidade de utilizadores com as inerentes limitações técnicas (sistema de memória, sincronização, fiabilidade, etc.); iii) estruturas de dados, técnicas gráficas, etc., etc. No ramo de Software incluem-se a programação (com a sua interacção e compromissos com o hardware), as linguagens, com a sua sintaxe e semântica, as técnicas de geração de códigos, a representação de sistemas de dados, etc. Evidentemente que esta divisão não é estanque, devendo explorar-se a relação entre a linguagem de programação, a estrutura dos dados, o projecto da máquina por forma a optimizar a interacção entre a estrutura algorítmica, a linguagem, a estrutura de dados e o hardware.

A Ciência do Computador, e os seus desenvolvimentos específicos, como sejam a inteligência artificial, os sistemas de programação automática, as linguagens simbólicas, etc., fertilizaram campos da Matemática como a Álgebra (Sistemas Algébricos, Teoria dos Conjuntos, Homologia, etc.), a Teoria dos Números, a Combinatória (Optimização Discreta, a Teoria dos Grafos, Programação Linear e Inteira, Jogos, etc.), a Lógica (Sistemas Formais), as Teorias da Computabilidade e Recursibilidade, etc.

A arrumação anterior não pressupõe que o conhecimento seja estanque, emparedado por barreiras rígidas. Antes pelo contrário. Os diferentes ramos de conhecimento entrelaçam-se numa teia em que por vezes os nós são de distinção difícil. A figura 8 exemplifica alguns sistemas que ilustram a interface entre os ramos anteriores. Por exemplo a antena, enquanto radiador (ou captador) de energia interpenetra com o Electromagnetismo, com a Propagação e a Radiação. Mas a antena, enquanto processador de informação, é tópico privilegiado na Teoria da

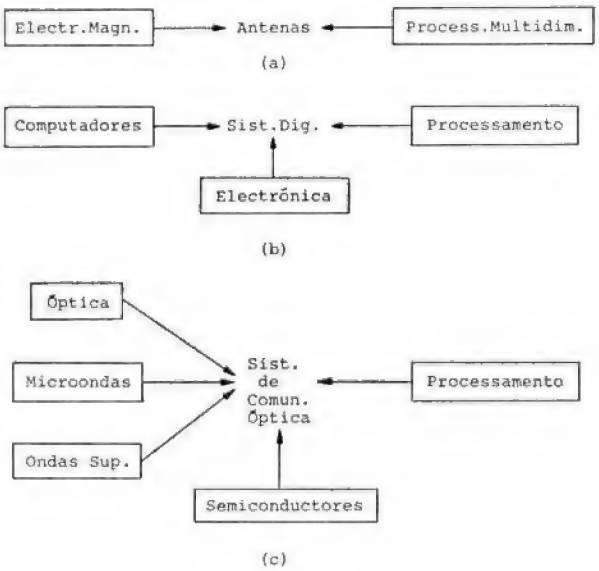


FIG. 8

Interfaces: Exemplos

Comunicação. Nos sistemas digitais concorrem os computadores, o processamento, a electrónica. Nos sistemas de comunicação óptica convergem teorias das ondas superficiais (Electromagnetismo, etc.), técnicas frequenciais de processamento, tecnologias de dispositivos semicondutores dependentes de processos de efeitos acoplados (piezoelectricidade, magnetoelasticidade, etc.).

Neste relatório identifica-se a Teoria dos Sistemas (TS) com a sua ramificação processamento, tal como explicitada na figura 6. A TS é assim um divisor comum a várias aplicações. Plagiando a expressão (usada noutro contexto) dum professor dos cursos do ano propedêutico, a TS é daltónica — conserva dos problemas o que há de mais essencial (modelo), formaliza-os em termos matemáticos (representação) e analisa estas imagens do

real, projectando novos sistemas, novos sinais. Mas a TS só é fecunda se atender à natureza intrínseca dos fenómenos subjacentes e quando a implementação dos seus projectos é testada na confrontação com o real.

2. Três Questões Básicas na Teoria dos Sistemas

Na secção anterior procurou-se estabelecer o âmbito da Teoria dos Sistemas (TS) referindo, através de uma listagem exemplificativa, de modo nenhum completa, domínios concretos por ela abrangidos. Da análise dos diagramas apresentados importa abstrair o ponto de vista, ou seja, a metodologia subjacente. Em poucas palavras a TS corresponde ao desenvolvimento formal de técnicas comuns a uma grande diversidade de problemas.

Estas técnicas dizem respeito a três questões:

i) Modelo/Representação do Sistema.
ii) Análise do Sistema.
iii) Síntese de Sistemas.

Desenvolve-se brevemente cada um destes pontos.

2.1 Modelo/Representação

Qualquer que seja a aplicação de interesse prático, que designaremos genericamente por sistema, a TS estabelece hipóteses de comportamento que, tomadas no seu conjunto, se referem por modelo do sistema. O modelo é a entidade, imagem do sistema, que interessa à TS. Diferentes hipóteses corresponderão a diferentes modelos. Reciprocamente o mesmo modelo serve de abstracção a diferentes sistemas. O modelo representa um compromisso entre o real e o formal, compromisso este ditado por factores de natureza consciente (e por isso mesmo controláveis pela Teoria), decorrentes da necessidade de simplificar o sistema complexo para o sujeitar ao estudo, ou de natureza inconsciente, como resultado de ignorância da fenomenologia real.

A passagem do sistema (real) para o modelo (formal) corresponde hoje em dia, com a diversificação das aplicações, a um dos domínios mais importantes de TS. Pode designar-se genericamente por Modelação. A experiência adquirida em diversos campos levou à sistematização de modelos em classes distintas como por ex., modelos lineares ou não lineares, variáveis no tempo ou invariantes, contínuos ou discretos, determinísticos ou probabilísticos, parâmetros concentrados ou distribuídos, etc., ver p.e. [2].

Esta classificação dos modelos (ela também sempre incompleta, podendo ser mais fina ou mais grosseira) correspondeu (e deu origem) a desenvolvimentos matemáticos específicos. A classe mais rica de resultados é sem dúvida a dos modelos lineares, invariantes no tempo.

O segundo aspecto que importa comentar neste parágrafo é o da representação dos modelos, ou seja, a tradução das hipóteses simplificativas que se assumem na linguagem formal da matemática. Esta descrição matemática — a representação — depende de factores vários, como a escolha das coordenadas, do sistema de eixos, etc., sendo possível diferentes representações para o mesmo modelo.

De entre todas as possíveis representações reportar-nos-emos a duas que mereceram grande desenvolvimento na TS e caracterizaram períodos distintos da sua evolução. Referimo-nos à representação exterior (Rex) e à representação interior (Rin).A discussão prossegue no contexto de modelos lineares, invariantes no tempo.

Rex, com raízes na Teoria dos Servomecanismos Clássicos (Hazen, Nyquist, Bode, Evans) e na análise frequencial do problema da Comunicação (Nyquist, Hartley, Black), descreve o sistema por uma função de transferência e estuda o seu comportamento no domínio dual do tempo — o chamado espaço da frequência (complexa). O instrumento de análise é o Cálculo Operacional (Transformadas de Laplace, Fourier e Z). Constituiu a representação privilegiada nos anos do pós-guerra, até final da década de 50.

Rin, particularmente adaptada ao estudo dos problemas surgidos com os programas espaciais, caracteriza o sistema por um conjunto de equações diferenciais ordinárias de 1.ª ordem, estudando-o directamente no domínio do tempo. O instrumento de análise é a Teoria das Equações Diferenciais. Dominou os avanços na TS nos anos 60.

A 2.ª representação permitiu melhor conhecimento da estrutura dos problemas básicos na TS. Esta representação, aliada ao (e motivado pelo) desenvolvimento e disseminação dos computadores (o primeiro grande computador transistorizado aparece em 1958) substitui ao ponto de vista analítico o ponto de vista algoritmico i.e., a solução do problema é encarada, não como uma fórmula (quantas vezes sem significado aparente) mas sim como uma rotina de instruções facilmente programável e executável por um computador, apresentando a resposta ao problema como uma tabela de valores numéricos ou um gráfico. Rin, à qual se associa o nome de Kalman, generaliza sem dificuldades à classe de sistemas multivariáveis, os resultados anteriores da Teoria e, sobretudo, evidencia as limitações de Rex. O mérito de Rin residiu sobretudo em ter atraído a atenção para o estudo de pontos básicos essenciais como a controlabilidade, a observabilidade e outras questões relacionadas, o que permitiu grandes avanços teóricos. Nos anos 70, na sequência de trabalhos, em que é justo citar o nome de Rosenbrock, retoma-se a representação exterior Rex, redefinindo em novos termos o operador representativo do sistema. O trabalho recente com Rex, retomando o Cálculo Operacional generalizou aos sistemas multivariáveis, técnicas gráficas, de projecto, clássicas. Este regresso a Rex é no entanto um regresso algebrizado, i.e., é a introdução de conceitos algébricos na representação externa. O instrumento analítico é agora o da Teoria das Matrizes Racionais (i.e., cujos elementos são funções racionais da variável complexa).

No contexto actual pode dizer-se que para sistemas lineares invariantes no tempo, e dependente das aplicações ou da natureza dos problemas, há um ressurgimento de trabalho (teórico) no domínio da Rex. A Rex generaliza

a uma classe mais vasta de problemas os resultados da Rin para esta classe de sistemas.

Para sistemas lineares variáveis e sistemas não lineares, Rin continua a revelar-se a via com maiores potencialidades.

Notar que as técnicas de projecto, desenvolvidas quer no contexto de Rex quer no contexto de Rin, quando aplicadas aos problemas de interesse nas aplicações estão irremediavelmente ligadas aos computadores.

2.2 Análise do Sistema

A análise corresponde à necessidade de formalização da questão clássica das ciências físicas e da natureza, nomeadamente a de compreender o comportamento do sistema. Para evitar a descrição exaustiva da resposta a todas as possíveis (e diferentes) condições de funcionamento, caracteriza-se o comportamento do sistema por um determinado número de propriedades e grandezas. No domínio dos sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT), em que é válido o princípio da sobreposição linear, assumem particular relevo grandezas como as frequências naturais e pólos, zeros, modos, etc.

A análise procura pois conhecer as características essenciais das respostas sem ter que as calcular. Por exemplo, estabelecem-se as características de estabilidade dos pontos de equilíbrio, determina-se a possibilidade, ou não, de controlar o sistema ou de reconstruir o seu estado (i.e., o conteúdo da sua memória) a partir de observações incompletas ou ruidosas, sem ter que fazer um estudo exaustivo de todas as situações. A análise corresponde à determinação das propriedades estruturais do sistema.

Os trabalhos de Kalman sobre algebrização dos SLIT contribuiram para a compreensão da estrutura dos sistemas. A questão essencial quase se pode resumir, em face de um objectivo determinado, a saber fazer a pergunta certa. Estes trabalhos vieram a fertilizar muito significativamente os desenvolvimentos da TS ainda em outros domínios, com outros modelos, nomeadamente de parâmetros distribuídos, de dimensão infinita, lineares variáveis no tempo, certas classes de sistemas não lineares (p. e. bilinear), etc.

Um outro ponto que interessa realçar no domínio da análise e que caracteriza também a TS é a avaliação do comportamento do sistema por técnicas de simulação. O computador (digital) é a ferramenta base. O comportamento do sistema, na impossibilidade de ser testado na vida real (ou porque a sua natureza não permite a experimentação directa — p.e. sistemas sociais — ou porque não é economicamente viável) é ensaiado via simulação no computador digital. A simulação abriu campo extenso à aplicação destas técnicas e justifica a vantagem da caracterização do sistema por modelos mais complexos, como p.e. não lineares.

2.3 Síntese

A síntese ou projecto de sistemas (e sinais) é talvez o ponto básico que distingue a TS de outras ciências da natureza. Estas procuram (passivamente) compreender ou explicar o comportamento do sistema enquanto, pela síntese, a TS intervém na sua evolução.

Também na síntese o tipo de representação utilizada, Rex versus Rin, levou a que se desenvolvessem diferentes metodologias. Na síntese foi necessário ultrapassar a apreciação qualitativa do comportamento do sistema. A introdução de medidas quantitativas (funcionais de custo ou de qualidade) colocou o problema no domínio do Cálculo das Variações — é a Optimização. Assume particular relevo a classe dos SLIT com funcionais de custo quadráticas, uma vez que estas conduzem, em última análise, a um problema formal linear.

Típico de Rex são técnicas de implementação por factorização espectral e o processamento tipo batch (não recursivo), enquanto Rin veio a desenvolver técnicas algorítmicas de realização, caracteristicamente recursivas.

3. O Departamento de Teoria dos Sistemas do IST

Nas secções anteriores apresentaram-se uma radiografia (passe a expressão) (secção 2) e uma sistematização das principais questões da TS (secção 3). Aborda-se agora o problema do ensino da TS no curso da engenharia electrotécnica (EE).

O ensino da TS enfrenta restrições típicas e antagónicas das quais se destacam:

i) O formalismo e abstracção inerentes ao desenvolvimento das sofisticadas técnicas de modelação, representação, análise e síntese de sistemas;

ii) A necessidade de introduzir os contextos básicos de aplicação mais característicos do domínio da EE, nomeadamente a produção, transporte e distribuição de energia, a comunicação, o controlo, a tecnologia, a instrumentação, etc.;

iii) O ensino das metodologias de i) e dos contextos de ii) ter que ser feito num período limitado (actualmente 10 semestres) com as necessárias extensão e profundidade;

iv) A motivação dos discentes para que acreditem na teoria e simultaneamente desenvolvam o seu espírito crítico em relação à(s) (insuficiências da) mesma teoria.

Perante restrições contraditórias e dificilmente quantificáveis a solução tradicional tem sido a de apresentar as metodologias e técnicas formais no contexto das aplicações a que os alunos são tipicamente mais sensíveis ou que sejam mais importantes do ponto de vista da sua vida profissional. Como exemplo, aponta-se a Teoria dos Circuitos que tem constituído nos curriculos das várias escolas de engenharia e ao longo do tempo e da evolução daqueles, o campo privilegiado de introdução destas técnicas formais. Por isso mesmo a Teoria dos Circuitos é habitualmente a primeira disciplina de introdução

à conceptualização e ao ferramental analítico/algorítmico no contexto da EE.

O Departamento de Teoria dos Sistemas (DTS) do curso de EE do IST faz incidir a sua actividade, quase se pode dizer exclusivamente, de acordo com a classificação da figura 2 da secção 1, no ramo do processamento. Isto não significa que o DTS esgote os principais tópicos apresentados na figura 6 ou que no IST, presentemente, os outros Departamentos não tenham também uma incidência maior ou menor nesta ramificação. De facto e até tendo em vista as restrições i) a iv) anteriormente apontadas é de toda a vantagem que nos outros Departamentos, no contexto de aplicações específicas, se retomem, ou mesmo apresentem pela primeira vez, os métodos formais característicos da TS.

O DTS inclui neste momento 13 disciplinas discriminadas no quadro da figura 9.

Para além das disciplinas desta figura interessa ter presente na discussão que se segue a disciplina de Fundamentos de Telecomunicações (4.° ano) do Departamento de Telecomunicações, onde se ministram aos alunos os conhecimentos básicos sobre Teoria da Informação e análise (frequencial) de sistemas de comunicação. Outras disciplinas, situadas embora no âmbito do processamento, constituem a abordagem de tópicos inseridos em aplicações especializadas pelo que não serão explicitamente consideradas na sequência.

Ano	Disciplina	Conteúdo
2.°	Sist. Lógicos	Alg. Boole, Máq. Combin. e Sequenc.
2.°	Computadores	Organização dum Computador
3.°	Mat. Apl. I, II	Var. Compl., Cálc. Op., F. Gener.
3.°	Circ. Comp.	Introdução à Teoria dos Circuitos
3.°	Lab. Intr. Circ. Sin.	Laboratório de Apresentação de Fenomenologia de interesse em EE, com ênfase na Comunicação
3.°	T. Sist. Sin.	Representação de Sin., Lapl., Four., Convolução, Quadrípolos
4.°	Sist. Dig. I, II	Implementação de Circ. com tecnologia digital
4.°	Servocom. I, II	Controlo Clássico (SLIT, Unidim., F. Transferência)
5.°	Servo. III	Controlo Clássico (complementos, Projecto)
5.°	Sist. Contr. Comun.	Sist. Dinâmicos Multidim. — técnica de projecto em Contr. Ópt. e Comun. Est.

FIG. 9

Departamento Teoria dos Sistemas

Das 13 disciplinas do quadro, e comparando-as com o diagrama da figura 6, conclui-se que Sist. Lógicos, Computadores e Sistemas Digitais I e II formam um núcleo (ainda elementar) especializado do DTS num domínio de interface com a Ciência dos Computadores.

As Matemáticas Aplicadas I e II constituem disciplinas de aprofundamento de ramos da Matemática com particular incidência na EE em geral e na TS em particular, devendo abranger metodologias necessárias às diferentes ramificações desta.

As restantes sete disciplinas (bem como algumas outras de que se recorda a já referenciada Fundamentos de Telecomunicações) constituem um conjunto onde se exploram, de pontos de vista muitas vezes complementares, assuntos e preocupações afins.

Estas disciplinas não esgotam os campos discriminados, explícita ou implicitamente na figura 6. E escolhem para contexto específico de apresentação dessas metodologias a Teoria dos Circuitos, o Controlo e a Comunicação.

A disciplina de Circuitos e Computação é de natureza formal, constituindo actualmente divisor comum de todos os alunos da EE. É uma introdução, no contexto dos circuitos, a metodologias de análise (tanto do domínio do tempo como no domínio da frequência) e a técnicas elementares de síntese. Põe em realce os pontos de vista analítico e algorítmico, procura sensibilizar os alunos simultaneamente para o rigor do formal (via axiomática) e para as limitações da Teoria, introduz a implementação hardware (com alguma prática laboratorial) e software (simulação). Sendo a primeira abordagem dos alunos a estas matérias constitui, passe a expressão, a primeira síntese necessária ao processo do conhecimento.

Na Teoria dos Sistemas e Sinais aprofunda-se, no contexto dos Circuitos e das Comunicações, a interacção entre os sistemas e sinais, abordando-se a representação frequencial de sistemas e sinais bem como técnicas mais especializadas de análise.

Os Servomecanismos I, II e III prosseguem presentemente a chamada via clássica do controlo, concentrando a sua acção em sistemas unidimensionais, lineares, invariantes, desenvolvendo a representação por função de transferência, com incidência formal no Cálculo Operacional, privilegiando-se técnicas de projecto baseadas nos métodos de Nyquist, Bode, Evans. Os Servomecanismos III terão tendência a transformar-se numa disciplina de projecto e instrumentação.

A disciplina Laboratório de Introdução aos Circuitos e Sinais corresponde a uma conceptualização, por via heurística e experimental, de fenomenologia da EE, com particular incidência no domínio da Comunicação e do Controlo. Pretende constituir uma motivação ou ponto de referência para outras disciplinas de natureza formal. Defende-se a inserção de disciplinas com este cariz em pontos mais recuados do curso (2.° semestre do 1.° ano, 1.° semestre do 2.° ano). Deve notar-se que a experimentação rigorosa nestes domínios, em particular no Controlo e na Comunicação, é para ser desenvolvida noutras

disciplinas, quer actualmente já existentes, quer possivelmente a criar. Há necessidade de ultrapassar neste domínio as conhecidas dificuldades de ordem material (instalações, equipamento, etc.), e também humana.

É evidente que o panorama que se tem vindo a descrever como abrangido pelas disciplinas mencionadas deixa vastos campos, no ramo do processamento, ainda por cobrir. A dificuldade de situar a disciplina de Sistemas de Controlo e Comunicação não reside em encontrar o que ensinar, antes pelo contrário, reside na escolha dos tópicos a abordar.

4. Sistemas de Controlo e de Comunicação

Discute-se em primeiro lugar a própria designação escolhida. Ela junta os três vocábulos Sistemas, Controlo e Comunicação como resposta a duas preocupações:

i) A da abstracção formal e universalidade dos conceitos abordados, inerentes à Teoria dos Sistemas, tal como se tem vindo a explicitar.

ii) A da exploração dos contextos particulares, (Controlo e Comunicação) hoje em dia ainda os mais significativos de aplicação da TS.

Uma disciplina destas tem necessariamente que abordar o seu programa e o seu conteúdo estruturar-se-ão em torno dos três pontos já referidos: i) Modelo/Representação; ii) Análise iii) Síntese. Esta sistematização não significa uma abordagem sequencial destes três tópicos, que se revela má pedagogicamente. A necessidade de motivação, e o alertar para as próprias dificuldades inerentes ao real, aconselham a que se retomem ao longo do tempo os três pontos anteriores, abstraindo novos modelos ou aprofundando outras técnicas formais mais complexas.

As outras disciplinas em que TS é abordada de forma sistemática (ver a discussão na secção 3), circunscrevem o seu âmbito quase exclusivamente a sistemas lineares, invariantes, determinísticos, unidimensionais. A disciplina de Sistemas de Controlo e de Comunicação (SCC) tem pois, à partida, 4 dimensões distintas em que pode progredir, consoante os sistemas estudados são:

i) Lineares ou Não Lineares;

ii) Invariantes (no Tempo) ou Variáveis (no Tempo);

iii) Determinísticos ou Probabilísticos;

iv) Unidimensionais ([1]) ou Multidimensionais.

Pretende-se que SCC constitua uma visão de síntese nestes domínios, pelo que, em vez de se considerar exclusivamente o aprofundamento de uma ou outra destas hipóteses se optou por uma abordagem que considera as 4 dicotomias i) a iv). Esta opção é feita adoptando o quadro formal da representação interna, ver secção 3, o que permite que a mesma estrutura teórica estude simultaneamente as quatro direcções indicadas, sem necessidade de reformular todo o contexto teórico quando se modifica uma ou mais das referidas dimensões num ou noutro sentido. O resto da secção considera as implicações na natureza de SCC dos quatro pontos i) a iv).

Sobre a hipótese iv), com sistemas multidimensionais de dimensão finita, a dimensionalidade não restringe a natureza dos resultados obtidos, desde que o problema seja colocado no quadro teórico apropriado. A linguagem é a dos vectores e matrizes em espaços Euclideanos, sendo, para a maioria dos problemas no contexto de SLIT, a Álgebra Linear a estrutura formal conveniente. Como já se notou anteriormente, esta algebrização, motivada sobretudo pelos trabalhos de Kalman do final da década de 50, sugeriu também, no contexto da representação externa, com os trabalhos de Rosenbrock, a generalização dos métodos frequenciais clássicos ao problema dos sistemas multidimensionais. À partida pode pois afirmar-se que SCC considera com toda a generalidade sistemas multidimensionais.

Na dimensão temporal, hipótese ii), conservando a linearidade, a generalização no sentido de sistemas,

invariantes ——————→ variáveis

não faz normalmente perder a analiticidade do problema. Isto é, a teoria permite ainda, normalmente, exprimir os resultados em termos de uma expressão ou fórmula. Vejam-se como casos típicos a existência de uma matriz de transição ou os critérios de controlabilidade e observabilidade. As consequências são de outra natureza, traduzindo-se na perda de aritmeticidade e de estacionaridade (ou uniformidade). Ou seja, as expressões analíticas a que se chegam, no caso de sistemas lineares, variáveis, são, habitualmente, complexas de interpretar, exigindo, a solução exacta, por via de regra, o recurso a algorítmos numéricos especializados com um número infinito de passos. Por outro lado, enquanto com sistemas invariantes as propriedades estruturais são independentes do instante em que se analisa o sistema, com sistemas variáveis elas dependem, de um modo geral, do instante inicial. Conclui-se, do dito, que, ao considerar sistemas variáveis, a dificuldade do problema não reside na analiticidade dos resultados, mas sim na sua implementação e no teste dos critérios disponíveis. O esquema formal teórico é necessariamente mais sofisticado, com recurso mais frequente às subtilezas da análise.

Sobre a linearidade versus não linearidade, dimensão i) supra, é de notar que os sistemas lineares se definem como a classe de sistemas que observa o princípio da sobreposição linear, enquanto que os sistemas não lineares são genericamente caracterizados pela ausência dessa propriedade. Daí que o corpo de resultados disponíveis

([1]) Unidimensionais refere-se aqui a sistemas de entrada simples e saída simples.

seja no segundo caso muito pobre. Ao caminhar no sentido

linear ——————→ não linear

perde-se, por um lado, normalmente, a analiticidade e, por outro, ganha-se uma complexificação das questões, tendo que se considerar explicitamente o desdobrar do quadro teórico numa dimensão

local versus global.

Isto é, os resultados são referidos ao estado inicial (condição fronteira) e sua vizinhança.

Finalmente, comenta-se a hipótese iii), dos sistemas determinísticos e dos sistemas probabilísticos. Os currícula dos cursos da EE, e em particular no IST, privilegiam de forma inequívoca a visão determinística do real. Há problemas em que, pela sua natureza intrínseca, esta visão limita significativamente a capacidade da teoria em compreender e influenciar correctamente a realidade. Nos sistemas probabilísticos assume particular importância a classe dos processos Gaussianos e Markovianos. E isto porque, quanto aos processos Gaussianos:

i) A linearidade preserva a Gaussianidade.

ii) Os processos Gaussianos são completamente descritos por dois parâmetros estatísticos, a média e a covariância.

iii) O Teorema do Limite Central justifica que numerosos processos ocorrendo na natureza possam ser considerados como assintoticamente Gaussianos.

E, quanto aos procesos Markovianos:

iv) Os processos Markovianos de ordem **n** são completamente descritos em termos da sua densidade de primeira ordem e das densidades condicionadas até à ordem **n**.

Uma outra hipótese que simplifica a aritmética dos resultados é a da estacionaridade dos processos.

Com respeito a sistemas probabilísticos e, tendo em conta as outras dimensões e a discussão anterior, pode dizer-se de forma sintética o seguinte:

Unidim. ——→ Multid.
- Não há acréscimo de dificuldades conceptuais
- Fala-se em processos vectoriais

Inv. ——→ Var.
- Preserva-se Gaussianidade
- Perde-se Estacionaridade

Lin. ——→ N. Lin.
- Perde-se Gaussianidade Preserva-se o carácter Markoviano
- Perde-se Analiticidade Solução Algorítmica

Daqui resulta que, com SLIT, se associem habitualmente processos Gaussianos estacionários e, no outro extremo, com sistemas não lineares se assumam processos Markovianos.

Além das quatro dimensões discutidas poderiam considerar-se generalizações de outro tipo, como p.e., sistemas de dimensão infinita. A principal questão refere-se aqui à natureza dos espaços envolvidos. Se a dimensão infinita for numerável há uma certa analogia com o que se disse sobre as dificuldades aritméticas na passagem

Invariantes ——————→ Variáveis.

As questões fundamentais são essencialmente de natureza algorítmica. Se a dimensão infinita não é numerável a teoria reveste elevado grau de abstracção.

Na disciplina SCC procura-se abranger no mesmo enquadramento teórico generalizações nas quatro dimensões i) a iv). Uma vez que se consideram sistemas multidimensionais há necessidade de recorrer sistematicamente a meios de cálculo automático no estudo dos sistemas reais, como resposta natural aos encargos computacionais envolvidos. Toma-se pois a perspectiva de apresentar como solução prática das questões levantadas a algorítmica, em prejuízo da solução analítica. Em contrapartida, a analiticidade é explorada no sentido de apresentar os conceitos no contexto mais simples, nomeadamente o de SLIT. Assim, o núcleo central do programa é uma vez ainda constituído pelo estudo de SLIT, agora multidimensionais. Sem recorrer a uma necessária sofisticação dos argumentos da Análise Matemática, consegue-se conter o formalismo dentro de limites razoáveis, apresentando os principais conceitos e métodos. Por outro lado referem-se, normalmente sem demonstração, os resultados correspondentes, para sistemas variáveis. Como exemplificativo da metodologia a adoptar no caso geral de sistemas não lineares, aborda-se um tópico nesse contexto. Escolhe-se a questão fundamental da Estabilidade onde se apresenta com algum desenvolvimento a Teoria de Lyapunov. A razão da escolha reside no carácter formativo que se reconhece a essa teoria, não apenas em estudos de estabilidade como noutros campos.

Antes da abordagem de técnicas de projecto em Comunicação introduz-se brevemente o ferramental analítico necessário para a representação de processos estocásticos e para o estudo de sistemas prababilísticos.

Em conclusão, a disciplina de Sistemas de Controlo e de Comunicação concentra-se em:

1. i) Sistemas Lineares Invariantes Determinísticos Multidimensionais — o contexto matemático é o da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias de 1.ª Ordem de Coeficientes Constantes e o da Álgebra Linear.

ii) Os resultados teóricos são de natureza analítica.

iii) Coloca-se a ênfase na realização em algorítmos numéricos.

iv) Incluem-se, por via de regra, sem demonstração, resultados para sistemas lineares variáveis.

v) Os sistemas não lineares persistem em background em SCC. Os sistemas lineares são apresentados como aproximação local dos sistemas não lineares.

2. Sistemas Probabilísticos — a ênfase é em sistemas lineares, invariantes, multidimensionais e processos Gaussianos/Markovianos estacionários.

3. Introduzem-se técnicas de projecto no Controlo e na Comunicação.

5. Programa. Conteúdo. Métodos de Ensino. Bibliografia.

5.1 Programa. Conteúdo.

O esquema geral do programa de Sistemas de Controlo e de Comunicação divide-se, de acordo com a análise feita anteriormente, em

Parte I — **Modelo/Representação**

Cap. I — Introdução à Teoria dos Sistemas.
Cap. II — Fundamentos Matemáticos.

Parte II — **Análise**

Cap. III — Sistemas Dinâmicos Lineares.
Cap. IV — Controlabilidade e Observabilidade.
Cap. V — Estabilidade.
Cap. VI — Sistemas Discretos.
Cap. VII — Sistemas Lineares e Processos Estocásticos.

Parte III — **Síntese**

Cap. VIII — Realização.
Cap. IX — Compensação e Reconstrução.
Cap. X — Elementos de Controlo Óptimo.
Cap. XI — Sistemas de Comunicação — Filtragem Linear Óptima.
Cap. XII — Identificação.

Este programa ignora numerosos tópicos, como p.e. a realização estocástica, o controlo sem interacção, o controlo estocástico, a inversão de sistemas, o controlo adaptativo, o «smoothing», a predição, etc. Por outro lado, e como se verá, a abordagem dos campos enumerados, designadamente na Parte III, é superficial, omitindo-se pontos importantes. O esquema enunciado é um compromisso entre o tempo disponível e a vastidão do tema. Uma cobertura coerente exige necessariamente uma sequência de dois semestres. Refere-se seguidamente o conteúdo de cada um dos capítulos.

Nos dois capítulos da Parte I procura-se: i) motivar os alunos, apresentando-lhes uma perspectiva da evolução da Teoria dos Sistemas (ver a Parte I de **[2]**) e dos principais tópicos a abordar; ii) explanar o ponto de vista adoptado; iii) justificar, na base de exemplos de aplicações concretas, o modelo e representação escolhidos; iv) apresentar os fundamentos matemáticos da Álgebra Linear, da Teoria das Probabilidades e Processos Estocásticos e das técnicas de Optimização baseadas na Minimização do Erro Quadrático Médio, necessários ao desenvolvimento e compreensão da disciplina.

A Parte II estuda as técnicas de análise e caracteriza o sistema, introduzindo formalmente propriedades estruturais e os correspondentes critérios de teste.

No cap. III considera-se a determinação analítica da resposta de sistemas lineares (variáveis e invariantes), a partir da matriz de transição, e as propriedades desta matriz. Desenvolve-se o cálculo da matriz exponencial (SLIT), por técnicas de Laplace e de Transformações de Semelhança. Segue-se o caso geral de sistemas não lineares, recordando-se técnicas de integração numérica de equações diferenciais ordinárias ([1]). O último tópico deste capítulo é a Linearização Dinâmica, ou seja, o método das perturbações para análise de sistemas não lineares, que permite gerar sistemas lineares variáveis a partir de sistemas não lineares.

O capítulo IV formaliza em perguntas a fazer à estrutura do sistema, questões como sejam:

— é ou não possível controlar o sistema?

— é ou não possível reconstruir o estado do sistema a partir das observações da saída?

Introduzidos os conceitos de controlabilidade e de observabilidade, desenvolvem-se critérios de teste para o caso simples de sistemas lineares invariantes. Os resultados referentes a sistemas lineares variáveis são também apresentados. O último tópico do capítulo refere-se à decomposição interna do sistema nas suas componentes controlável/observável, etc.

O capítulo V desenvolve o importante tópico da Estabilidade. Após uma breve referência aos métodos clássicos, esclarece-se a natureza do problema, apresentando-se depois as definições formais de estabilidade de estados de equilíbrio, no contexto mais geral de sistemas não lineares. Apresentam-se, para sistemas lineares, resultados baseados na natureza da resposta do sistema (1.° método de Lyapunov). Finalmente considera-se o

([1]) No contexto de SCC trata-se apenas de referir a sua existência já que esses métodos são estudados na Análise Numérica e retomados, presentemente, na disciplina de Circuitos e Computação, 3.° ano de EE do IST.

Método Directo de Lyapunov (2.° método). Discutem-se brevemente algumas técnicas (algorítmicas) de geração de funções de Lyapunov para sistemas não lineares. Os resultados da teoria são particularizados ao contexto de sistemas lineares.

O capítulo VI estabelece, para sistemas discretos no tempo, os resultados desenvolvidos nos capítulos III a V para sistemas contínuos.

O capítulo VII, último da Parte II, estuda a interacção entre sistemas e processos estocásticos. Admite-se, normalmente, que se conhece apenas a descrição incompleta de 2.ª ordem (limitação de natureza prática) dos processos. Dado que existe sempre um processo Gaussiano com a mesma descrição incompleta (i.e. com a mesma média e autocorrelação) consideram-se sobretudo processos Gaussianos, estabelecendo-se as equações de propagação do 1.° e 2.° momentos.

A Parte III estuda técnicas de síntese. No capítulo VIII é a realização de sistemas lineares invariantes, isto é, a obtenção da representação interna Rin (matrizes A, B, C, D) a partir da representação externa Rex (matriz de transferência), ou o problema inverso. As dificuldades residem em

$$\text{Rex} \longrightarrow \text{Rin}.$$

Resolve-se o problema para sistemas com um número de zeros inferior ao número de pólos, realizando as chamadas representações canónicas. O caso de sistemas de entrada simples/saída simples é estudado com maior desenvolvimento. O capítulo aborda ainda o problema da transformação de coordenadas que permite, em certas condições, passar de uma representação genérica para uma das representações canónicas.

No capítulo IX consideram-se simultaneamente problemas típicos do controlo (compensação) e da comunicação (reconstrução), num contexto determinístico. No primeiro caso é o problema da colocação de pólos por realimentação linear negativa do estado e da saída. Este problema clássico do controlo é resolvido no contexto mais geral de sistemas multidimensionais. Na reconstrução considera-se o estabelecimento de condições que permitam a estabilização do observador.

Os capítulos X e XI introduzem, respectivamente, no contexto do Controlo e da Comunicação, o projecto óptimo de sistemas. No capítulo X, enunciado o problema, restringem-se as possíveis soluções pela escolha de uma funcional de custo que quantifica, no problema em estudo, as características desejadas para o comportamento do sistema. Enuncia-se o Princípio do Mínimo de Pontryagin e apresenta-se a Programação Dinâmica de Bellman (no contexto discreto). Finalmente aplicam-se estes métodos ao projecto de sistemas lineares óptimos com diversas funcionais de custo (tempo mínimo, combustível mínimo, energia mínima).

No capítulo XI aborda-se o problema da estimação estatística de formas de onda estocásticas. Descrito o problema no contexto dum sistema de comunicação (modulação linear), classificam-se os estimadores e vários critérios de estimação. Adopta-se uma perspectiva Bayesiana e apresentam-se os filtros recursivos lineares óptimos de Kalmam-Bucy. Discutem-se ainda problemas de implementação.

O capítulo XII, o último, é o da Identificação, constituindo uma introdução a técnicas, alternativas às analíticas, de extracção de modelos a partir dos dados experimentais, considerando-se métodos determinísticos e estocásticos.

Note-se que, no esquema acima, não se reservou nenhum capítulo à apresentação exclusiva de algorítmos. Optou-se pelo desenvolvimento de alguns algorítmos no âmbito de problemas específicos nos diferentes capítulos.

A discriminação completa dos capítulos e suas secções é apresentada seguidamente.

Parte I — **MODELO/REPRESENTAÇÃO**

Cap. I — **Introdução à Teoria dos Sistemas**

1. Perspectiva Histórica.
2. Sistema. Modelo. Representação.
3. Exemplos de Aplicação.
4. Síntese dos Resultados.

Cap. II — **Fundamentos Matemáticos**

1. Álgebra Linear.
   Espaços Lineares. Transformações Lineares. Vectores Próprios. Valores Próprios. Funções de Matrizes. Teorema de Cayley-Hamilton.

2. Elementos de Teoria das Probabilidades e Processos Estocásticos.
   Espaços de Probabilidades. Independência. Probabilidades Condicionais. Lei de Bayes.
   Variáveis Aleatórias. Função Distribuição e Função Densidade de Probabilidade. Funções de Variáveis Aleatórias. Momentos. Média. Variância. Desvio Quadrático Médio. Exemplos.
   Variáveis Aleatórias Conjuntamente Distribuídas. Correlação. Covariância. Vectores Aleatórios.
   Função Distribuição. Função Densidade. Função Característica.
   Teorema do Limite Central.
   Processos Aleatórios. Caracterização Completa e de 2.ª Ordem. Processos Aleatórios Conjuntamente Distribuídos. Processos Aleatórios Vectoriais. Função Autocorrelação. Função Correlação. Covariância e Covariância Cruzada.
   Estacionaridade. Ergodicidade.
   Função Densidade Espectral de Potência e Função Densidade Espectral de Potência Cruzada.
   Exemplos. Ruído Branco. Processo Gaussiano. Processo Markov. Processo de Incrementos Independentes. Processo Browniano. Processo Poisson.

3. Técnicas de Minimização do Erro Quadrático.
   Minimização do Erro Quadrático. Minimização Ponderada do Erro Quadrático. Minimização Recursiva.

Parte II — **ANÁLISE**

Cap. III — **Sistemas Dinâmicos Lineares**

1. Representação Interna.
2. Sistemas Lineares Variáveis. Matriz de Transição. Série de Peano-Baker. Propriedades.
3. Fórmulas de Variação das Constantes.
4. Sistemas Lineares Invariantes. Matriz Exponencial. Propriedades.
5. Cálculo da Matriz Exponencial. Transformada de Laplace. Transformações de Semelhança e Redução a Formas Canónicas.
6. Linearização Dinâmica.
7. Algorítmos de Integração.

Cap. IV — **Controlabilidade e Observabilidade**

1. Definição.
2. Critérios para Sistemas Lineares Invariantes.
3. Critérios para Sistemas Lineares Variáveis.
4. Decomposição Interna.

Cap. V — **Estabilidade**

1. Introdução.
2. Breve Referência aos Métodos Clássicos.
3. Questões Preliminares.
4. Estabilidade de Estados de Equilíbrio: Definições.
5. Estabilidade de Sistemas Lineares.
   Sistemas Lineares Variáveis no Tempo.
   Sistemas Lineares Invariantes.
6. Segundo Método ou Método Directo de Lyapunov. Introdução. Sistemas Não Lineares Invariantes. Sistemas Não Lineares. Geração de Funções de Lyapunov. Sistemas Lineares.

Cap. VI — **Sistemas Discretos**

1. Sistemas Lineares Variáveis. Matriz de Transição.
2. Sistemas Lineares Invariantes. Cálculo da Matriz de Transição. Transformada Z e Transformações de Semelhança.
3. Fórmula de Variação das Constantes.
4. Controlabilidade e Observabilidade. Critérios.
5. Estabilidade.

Cap. VII — **Sistemas Lineares e Processos Estocásticos**

1. Resposta do Sistema a Entradas Estocásticas.
2. Equações de Propagação da Média e Covariância.
3. Sistemas Lineares Invariantes. Regime Estacionário.

Parte III — **SÍNTESE**

Cap. VIII — **Realização**

1. Matriz de Transferência e Representação Interna.
2. Representações Canónicas.
3. Transformações de Coordenadas e Representações Canónicas.
4. Cancelamento de Pólos e Zeros. Efeito na Controlabilidade e Observabilidade.

Cap. IX — **Compensação e Reconstrução**

1. Colocação de Pólos. Realimentação Linear Negativa do Estado.
   Sistemas de Entrada Simples. Sistemas de Entrada Múltipla.
2. Reconstrução do Estado. Observadores.
3. Colocação de Pólos. Realimentação Linear Negativa da Saída.
4. Observadores de Ordem Mínima.

Cap. X — **Elementos de Controlo Óptimo**

1. Enunciado do Problema. Funcional de Custo. Restrições no Controlo. Exemplos. Tempo Mínimo. Combustível Mínimo. Energia Mínima.
2. Princípio do Mínimo de Pontryagin.
3. Programação Dinâmica de Bellman.
4. Projecto de Sistemas Lineares Óptimos com Custo Quadrático.

Cap. XI — **Sistemas de Comunicação — Filtragem Linear Óptima**

1. Enunciado do Problema. Estimadores (não) Polarizados, de Variância Mínima, Consistentes.
2. Filtragem Recursiva Linear Óptima.
   Filtros de Kalman-Bucy. Equação de Propagação do Filtro. Equação de Ricatti da Covariância.
3. Implementação. Algorítmos e Considerações de Natureza Numérica.

Cap. XII — **Identificação**

1. Métodos Determinísticos.
2. Métodos Estocásticos.
   Técnicas de Autocorrelação. Análise por Séries no Tempo.

Esta lista de assuntos, constituindo o núcleo considerado mínimo indispensável numa disciplina com os objectivos de SCC, revela-se demasiado extensa para ser coberta integralmente num único semestre. Discutem-se por isso programas restritos (alternativos) a prosseguir num semestre.

Estabelecem-se, no entanto, primeiramente, dois pontos a ter em consideração:

i) O semestre é dimensionado de acordo com o método exposto em **[9]**, o que se traduz por 14 semanas úteis de aulas. É de notar que, embora no passado ainda se não tenha atingido este total, é de esperar que, futuramente, isso possa suceder, com a adopção, no IST, de

calendários escolares e métodos pedagógicos mais racionais. De qualquer forma programa-se, na sequência, a disciplina para

$$14 \times 2 = 28 \text{ sessões teóricas}$$
$$14 \times 1 = 14 \text{ sessões práticas}$$

em que cada sessão corresponde a um módulo de 1 ½ h.

ii) Os alunos que frequentaram até ao presente (1.° semestre 1977/78 inclusivé) as sucessivas versões de SCC evidenciaram grandes dificuldades com a Álgebra Linear (para não falar da Teoria das Probabilidades e Processos Estocásticos). No entanto, os futuros alunos terão já frequentado a disciplina de Circuitos e Computação (3.° ano de EE no IST), onde se faz extensivo uso da Teoria das Matrizes e se desenvolve, no contexto de circuitos, a representação interior. Espera-se que algumas das dificuldades até agora encontradas ,decorrentes da falta de destreza no cálculo matrical e da desmotivação (por dificuldade em idealizar sistemas físicos — p.e. circuitos eléctricos de simulação analógica), venham a estar naturalmente resolvidas à partida. Pensa-se assim que os futuros alunos já terão tido contacto anterior com o ponto de vista adoptado em SCC.

FIG. 10

Programações Exequíveis para SCC

Tendo em atenção estes pressupostos propõem-se as programações (alternativas) da figura 10. Em parêntesis indica-se o número de sessões dedicado a cada tópico. Nota-se que a sequência apresentada anteriormente foi alterada. Por outro lado as duas versões da figura 10 optam entre o Cap. X e o Cap. XI. Note-se que esta última inclui também os elementos de descrição probabilística. Devido talvez às inclinações do autor deste relatório, e à sua preparação anterior, tem-se preferido esta versão à versão que opta pelo Cap. X. No futuro pensa-se alternar entre uma e outra via. É de notar que ao Cap. XII não se reserva explicitamente nenhuma sessão teórica, devido à falta de tempo. Breves referências ao problema poderão ser feitas no contexto do Cap. XI. Também os resultados mais sofisticados da Álgebra Linear e da Teoria das Matrizes (Cap. II-I) são introduzidos, quando necessários, no decorrer do Cap. III, enquanto os que se consideram mais elementares são recordados nas sessões de problemas.

5.2 Métodos de Ensino

Do que se disse no parágrafo anterior se conclui que a disciplina SCC é de natureza formal, adoptando-se a distribuição 2 do quadro 4.1 de **[9]** e a filosofia explanada em 3.2 de **[10]**.

O seu ensino é assim feito a partir de:

i) Sessões teóricas (duas por semana) de 1 ½ hora cada, onde se apresentam os pontos básicos da matéria;

ii) Sessões de problemas (uma para duas sessões teóricas) de 1 ½ hora cada, onde se exemplificam com problemas, tanto quanto possível reflexo de aplicações de interesse, os conceitos e resultados da teoria (¹).

iii) Séries de problemas, de escopo limitado, a resolver pelos próprios alunos, constituindo oportunidade, para estes, de estudo e reflexão sobre a matéria.

Importa sobre este tema fazer dois comentários adicionais:

i) O primeiro refere-se à não consideração explícita, presentemente, no contexto da disciplina, de técnicas de simulação digital e analógica. Este ponto poderá vir a ser colmatado no futuro. De facto, e no contexto de Circuitos e Computação, está a desenvolver-se um «pacote» de subrotinas de aplicação generalizada, a que os alunos de SCC poderão também vir a ter acesso. Quanto à simulação analógica, o problema está relacionado com um melhor apetrechamento dos Laboratórios de Circuitos e Computação e de Servomecanismos. Tal como já se apontou anteriormente, as dificuldades não são apenas de natureza material.

ii) O segundo diz respeito à inserção de SCC no curriculum de EE (licenciatura). O seu presente isolamento no contexto do curso poderá ser ultrapassado por duas vias. A primeira, inserindo já estes assuntos em

(¹) Nas versões anteriormente praticadas, e uma vez que o ensino tem sido exclusivamente ministrado pelo autor, as sessões são mais de natureza teórico-prática. No futuro preferir-se-á o presente formato.

disciplinas do 3.° ou 4.° ano [1] e desdobrando no 5.° ano a SCC numa sequência de duas — uma no 1.° e outra no 2.° semestre. Este desdobramento permitirá uma cobertura mais extensa dos tópicos referidos na Parte III, bem como de outros aí omitidos. A segundo via diz respeito à criação de cursos de pós-graduação, incluindo cobertura mais aprofundada destes campos.

5.3 Bibliografia

Para o programa desenvolvido anteriormente não existe, do conhecimento do autor, um livro que se possa adoptar como referência única. A dificuldade reside no facto de a literatura existente se dirigir a estudantes com preparação matemática e motivação para estes temas, muito diversas das que presentemente revelam os alunos do IST. Por outro lado, a literatura disponível pressupõe que estes assuntos sejam retomados em diferentes momentos do curriculum académico, com diferentes graus de sofisticação, e abrangendo diferentes tópicos. Por isso os livros que se encontram são, por via de regra, de âmbito muito restrito e especializado em relação ao programa descrito, pecando (por excesso ou por defeito) na dificuldade formal com que os assuntos são apresentados.

A referência **[11]** é manifestamente introdutória, cobrindo apenas tópicos da Parte II e do cap. VIII, enquanto **[12]** dedica cerca de 50 % do seu conteúdo à Álgebra Linear. Daí que a cobertura que faz nos restantes capítulos sobre temas da Parte II e III acima considerados seja superficial, remetendo para problemas o desenvolvimento de questões fundamentais. Do ponto de vista de extensão de tópicos abordados, grau de sofisticação (moderado), preço, **[12]** é sem dúvida uma referência aconselhável. Sobre o Cap. XI, e de entre a vasta literatura existente, destaca-se em particular **[13]** pela sua acessebilidade e pela ênfase em aspectos de implementação. Neste livro encontra-se ainda um breve resumo (cerca de duas dezenas de páginas) dos elementos necessários da Teoria das Probabilidades e Processos Estocásticos. Sobre o Cap. X refira-se o tratado clássico **[14]**, presentemente algo desactualizado. Refiram-se ainda **[15]** sobre os Cap. IX, X-4, XI **[16]** e **[17]** sobre o Cap. V **[18]** e **[19]** sobre a Parte II. Como resposta às dificuldades apontadas tem-se optado por ir coligindo apontamentos próprios sobre os assuntos abordados, ver **[20]**.

6. Conclusão

Neste relatório procurou-se primeiramente delimitar o âmbito da Teoria dos Sistemas, especificando alguns dos seus campos privilegiados de acção (secção 1) e discutindo algumas questõeõs básicas (secção 2). Reflectiu-se depois, na secção 3, sobre o Departamento de Teoria dos Sistemas do curso de Engenharia Electrotécnica no IST, departamento cuja actividade se circunscreve ao domínio da Teoria dos Sistemas e em que se insere a disciplina de Sistemas do Controlo e Comunicação. Na secção 4 apresentou-se o ponto de vista tomado nesta disciplina, definindo-se a sua natureza global. Finalmente na secção 5 estudou-se a organização da disciplina, apresentando o programa, o conteúdo, os métodos de ensino praticados e comentando (brevemente) (alguma) (d)a bibliografia.

Bibliografia

[1] **N. Wiener,** «Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine», 2.ª edição, The MIT Press Cambridge, Mass, (1948), 1961.

[2] **A. G. Portela** e **J. M. F. Moura,** «Aplicação da Teoria dos Sistemas Em Engenharia», Relato do Tema 8, Congresso da Ordem dos Engenheiros, Lisboa, 20-26 Nov. 1977.

[3] **C. E. Shannon,** «The Mathematical Theory of Communication», Bell Syst. Techn. J., vol. 27, págs. 379--423, Julho 1948; ibid, vol. 27, págs. 623-656, Out. 1948.

[4] **B. Gold** e **C. Rader,** «Digital Processing of Signals», McGraw-Hill, NY, 1969.

[5] IEEE Transactions on Audio and Electro Acoustics, N. Y.

[6] **J. L. Flanagan,** «Speech Analysis Synthesis and Perception», Springer-Verlag, Berlim, 1972.

[7] **A. V. Oppenheim** e **R. W. Schafer,** «Digital Signal Processing», Prentice-Hall, 1975.

[8] **L. R. Rabiner** e **B. Gold,** «Theory and Application of Digital Signal Processing», Prentice-Hall, 1975.

[9] **J. M. F. Moura,** «Planificação do Calendário Escolar», Técnica 445/446, 1977/78.

[10] **J. M. F. Moura,** «Ensino e Escolas de Engenharia: Tópicos para Discussão», Técnica 445/446, 1977/78.

[11] **D. M. Wiberg,** «State Space and Linear Systems», Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1971.

[12] **W. L. Brogan,** «Modern Control Theory», Q. I. P., N. Y.

[13] **Gelb,** «Applied Estimation Theory», M. I. T. 1971.

[14] **Athans** e **Falb,** «Optimal Control», McGraw-Hill, N. Y.

[15] **Kwakernaak,** «Optimal Linear Control Systems».

[16] **C. Desoer,** «Notes for a Second Course on Linear Systems», Van Nostrand Reinhold, 1970.

[17] **R. W. Brockett,** «Finite Dimensional Linear Systems», N. Y., Wiley, 1970.

[18] **J. L. Willems,** «Stability of Dynamical Systems».

[19] **W. Hahn,** «Stability of Motion», Springer — Verlag, N. Y., 1967.

[20] **J. M. F. Moura,** «Apontamentos para Sistemas de Controlo e Comunicação», Departamento Teoria dos Sistemas, IST, 1977.

[1] Em currícula de Universidades estrangeiras ensaia-se mesmo a primeira abordagem ao nível do 2.° ano.

Mine planning in a phosphate deposit

L. CORTEZ [1]
F. MUGE [1]
H. PEREIRA [1]

ABSTRACT

In the early stages of the planning of a new exploitation, the error in ore reserve estimation is an important factor that must not be disregarded. As this error can be computed by geostatistical methods, the risk of the venture can be calculated for different recognition patterns in a certain asumption of economical conditions.

A case story is described for an open pit phosphate deposit in which grade/tonnage curves and their confidence intervals are related to an economic function for three drilling patterns and decisions are taken on the basis of cost and value of supplementary information.

SUMÁRIO

Nos estágios iniciais do planeamento de uma nova exploração mineira, o erro cometido na estimação das reservas é um factor importante que não deve ser desprezado. O cálculo deste erro por métodos Geoestatísticos permite a execução de uma análise de risco fixando certas condições económicas.

É descrito no artigo um exemplo concreto de aplicação destas técnicas. Trata-se de um depósito de fosfato explorado a céu aberto para o qual foram obtidas curvas tonelagem/teor com os respectivos intervalos de confiança. Estabeleceu-se uma relação entre estas curvas e uma função económica para três malhas de reconhecimento, tendo as subsequentes decisões sido tomadas com base num balanço entre o custo e o valor da informação suplementar.

INTRODUCTION

A phosphate deposit located in the State of Goias, Brasil, was recognized by a 100 × 100 m regular grid of 134 drillings. Pieces of core from these drillings were analysed for P_2O_5 and CaO and grades in P_2O_5 from apatite were computed for each 1m length sample. Blocks 50 × 50 × 10 m were built over all the deposit for selection purposes in this stage of planning. For each of these units, a kriging procedure as described by Matheron (1970) was adapted in order to estimate the average grade and kriging variance.

As the deposit is not yet completely recognized in depth, global ore reserve estimation is unneeded, but some decisions must be taken about the economics of the venture in the zone near the surface.

For this zone, an open pit and a pilot plant were designed and strategies of exploitation must be compared.

STRUCTURAL ANALYSIS

The Variogram is the basic tool of Geostatistics. The mathematical expression of this function is:

$$2\gamma(\vec{h}) = \{[Y(\mu+\vec{h}) - Y(\mu)]^2\} \qquad (1)$$

$\gamma(\vec{h})$ is the variogram,

$\gamma(\mu+h)$ and $\gamma(\mu)$ are the values taken by the Regionalized Variable in two points linked by the vector $\vec{h}$.

This function, as Matheron (1970) and David (1975) showed, depends on the sample volume where $Y(\mu)$ is calculated.

In the case of this deposit, the basic information includes 5m spaced channel samples which must be used in computation of variograms for small scale study. A numerical deconvolution as described by David (1975) was performed to recover punctual variograms from channel samples and core drilling samples.

An example of such a variogram in EW direction is shown in Fig. 1 and a theoretical model of spherical type was fitted.

The basic parameters shown in Fig. 1 are:

Co — nugget effect
C — sill
α — range

The meaning of these parameters are discussed by Matheron (1970), David (1975), Journel (1975).

In particular, the «range» is the distance for which the autocorrelation function vanishes.

(1) Research Senior Assistants, CVRMUL — IST — Ave. Rovisco Pais, Lisboa, Portugal.
Paper presented at 15th APCOM Symposium, Brisbane, Australia, 1977.
Manuscrito recebido para publicação em 31/10/77.

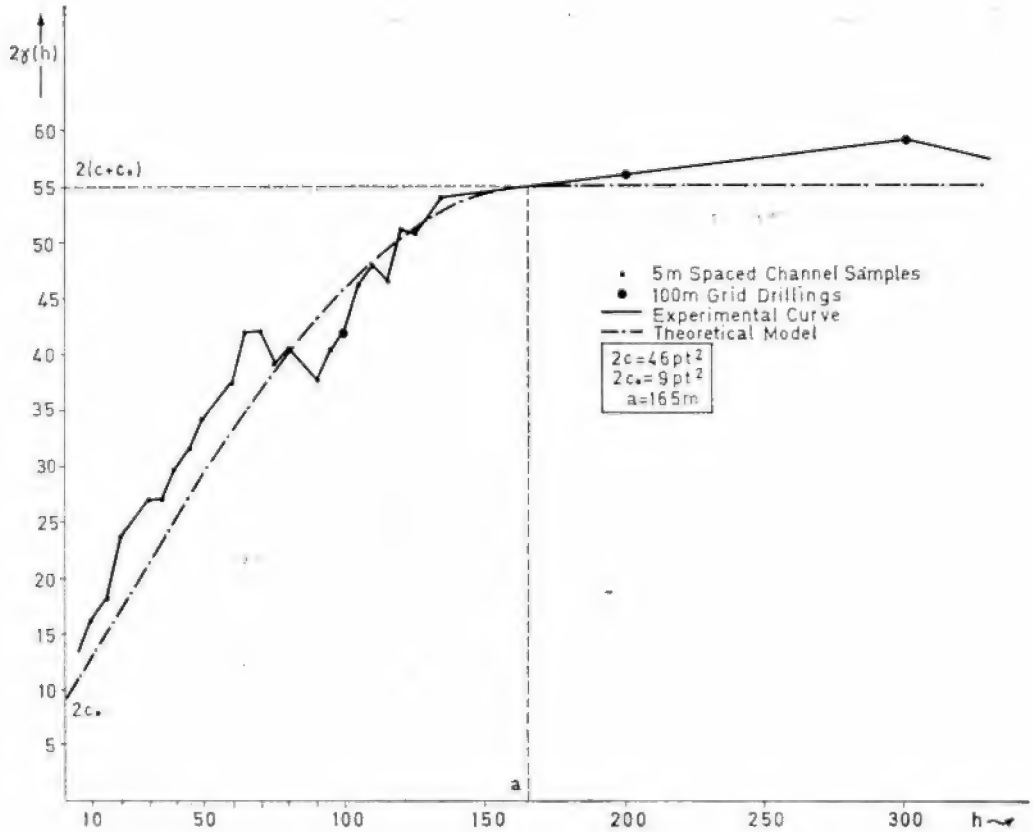


FIG. 1

EW Variogram of accumulation in P_2O_5

Variograms of the same type were computed for NS and vertical directions and a geometric anisotropy was detected (ranges of 345 m and 37.5 m).

The Regionalized Variable used is the accumulation in P_2O_5 (grade x thickness) from apatite.

KRIGING

For each block, the kriging technique provides an optimal estimation of the average grade and the variance of this estimation. Assuming a normal distribution for the average grade estimate $\dot{Z}$, the real value Z of the grade in a block lies in the interval
at the 95 % probability level.

$$\dot{Z} - 2\sigma_K \leqslant Z \leqslant \dot{Z} + 2\sigma_K \qquad (2)$$

If one takes a set of n blocks, the confidence interval of the average grade is:

$$\dot{\bar{Z}} - \frac{2\bar{\sigma}_K}{m} \leqslant Z \leqslant \dot{\bar{Z}} + \frac{2\bar{\sigma}_K}{m} \qquad (3)$$

where $\dot{\bar{Z}}$ is the kriging estimate of the average grade of n blocks and $\bar{\sigma}_K^2$ is the average kriging variance of n blocks. In other words, there is a risk of 2.5 % that the average grade of a certain set of n blocks is lower than $\dot{\bar{Z}} - \frac{2\bar{\sigma}_K}{m}$.

Using all the available information, a block by block estimation for all units of the deposit was performed using a three dimensionnal kriging program that provides estimates $\dot{Z}$ and variances σ_K^2.

For details in kriging theoretical basis, see Matheron (1970) and for practical applications, see Journel (1975) and David (1975).

GRADE/TONNAGE CURVES

A small area in the deposit was chosen to build grade/tonnage curves and study the sensitivity of an economic function to the confidence intervals of those curves.

The selected area is shown in Fig. 2.

For each of the 445 blocks of this area, a grade/ /tonnage curve was computed on the basis of kriged values for grades.

This curve can be used for purposes of planning at this stage as David (1972) suggested.

When more information is available, namely, smaller exploitation units, loader machines to be used, blast holes

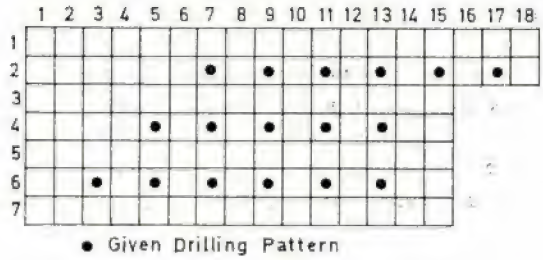


FIG. 2

Location of the blocks and drillings in the selected area

geometry, etc., a short term planning must be done using the method developed by Matheron (1975) and applied by Marechal (1975).

The grade/tonnage curve for this area is shown in Fig. 3 and the grade/average grade curve for the same area is shown in Fig. 4.

It is assumed that there is no error in the density of the ore and so the number of blocks with grade higher than a certain cutoff is proportional to its tonnage and no confidence intervals are assigned to this curve.

On the other hand, confidence intervals for the average grade can be computed from 3 and the curve of Fig. 4 shows these intervals for the 95 % probability level.

SUPPLEMENTARY DRILLING PATTERNS

In the same area, the effect of a first supplementary campaign of seven drillings of about 30 m length (the

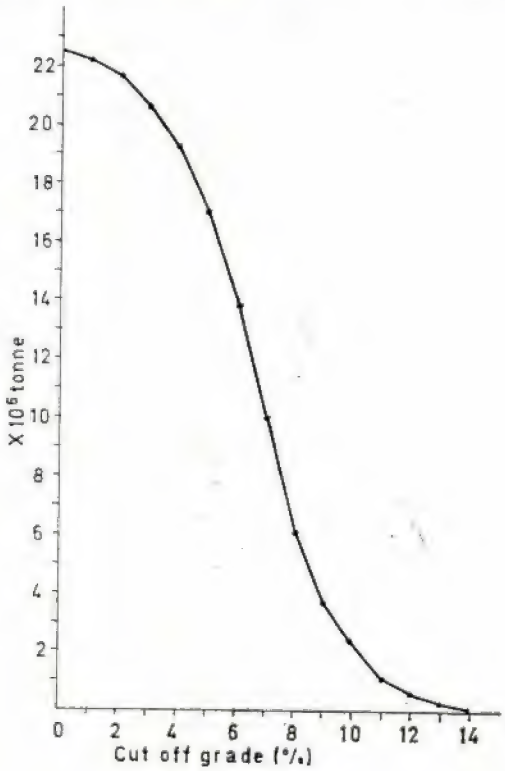


FIG. 3

Grade/tonnage curve

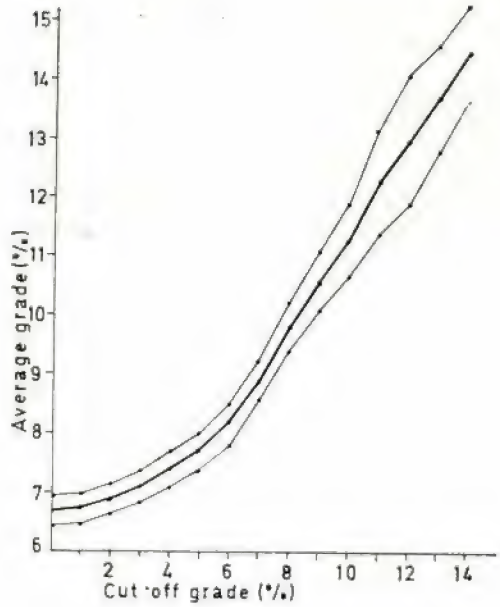


FIG. 4

Grade/average grade curve with 95 % confidence intervals

same as the given drillings) and a second campaign of ten more drillings was simulated. For location of these, see Fig. 5.

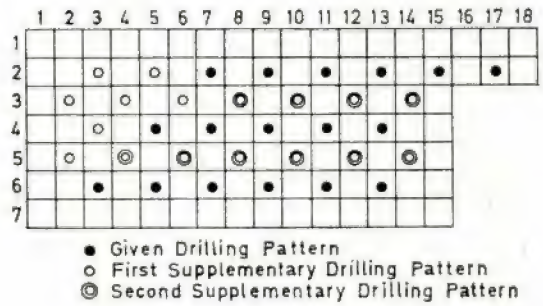


FIG. 5

Simulated supplementary drilling campaigns

As kriging depends only on the variogram and geometry of samples used for estimation of each block, the variance of kriging for all the blocks in the area can be computed in both cases (first and second supplementary drilling campaigns).

In the zone of the interesting cut-off grades (2 to 6 %) the grade/average grade confidence intervals were computed and are shown in Fig. 6.

If it is assumed that, for a certain cutoff, the management wants to take a risk of 2.5 % of producing ore with an average grade lower than $\bar{Z} - 2\bar{\sigma}_K/m$ (see 3), the useful curves for planning the exploitation are 0, 1, 2 in Fig. 6.

If the first drilling campaign is performed, and for the same risk of 2.5 %, the minimum average grade fore-

seen is higher than if no supplementary drillings is made (curves 1 and 0 in Fig. 6).

RISK ANALYSIS

Assuming a simple linear model for an economical function relating tonnage and average grade, the global Profit P for all blocks mined can be written as —

$$P = T(g_m v - C) \tag{4}$$

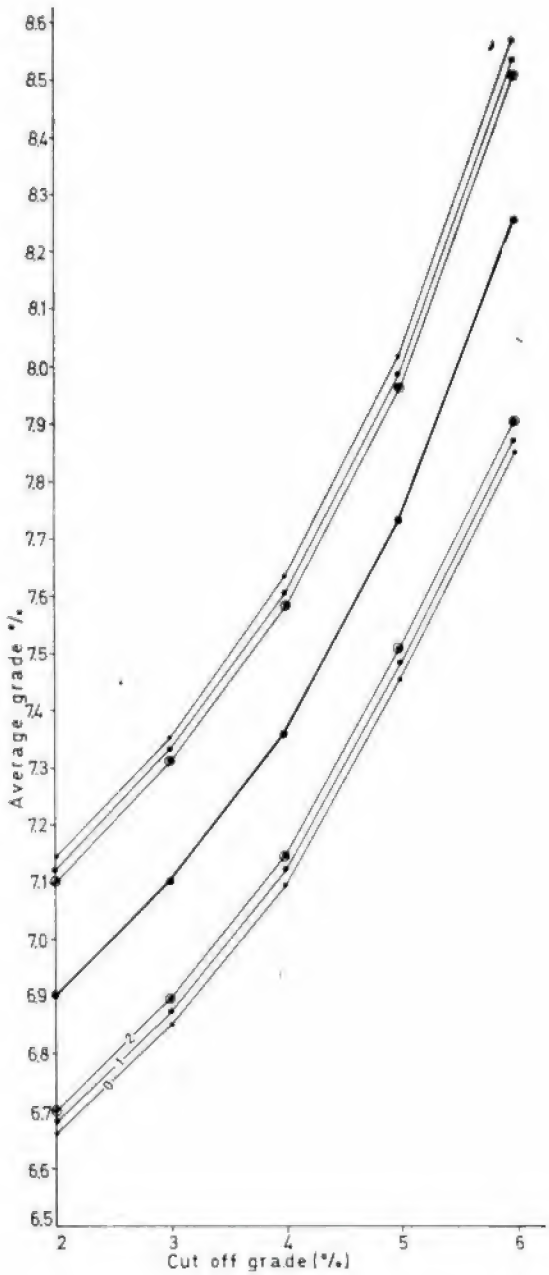


FIG. 6

Grade/average grade curves and confidence intervals for the given drilling pattern (0), first supplementary drilling campaign (1) and second supplementary drilling campaign (2)

where:

T — is the tonnage of blocks mines (tonnes)

g_m — is the average grade of blocks mined (%)

v — is the selling price of 1 ton of product corrected for recovery in the ore dressing plant

C — is the cost of mining of 1 ton of ore

T is related to cut-off grade by the curve in Fig. 3 and g_m is related to the same variable by the curve in Fig. 4.

Assuming a risk of 2.5 %, the minimum Profit expected for a certain cut-off can be calculated from 4 using the lower confidence interval (curve 0 in Fig. 6) for computing $g_m - 2\bar{\sigma}_K/m$.

So, there is 2.5 % of probability of obtaining a Profit lower than P_M:

$$P_M = T[(g_m - 2\bar{\sigma}_K/m)v - C] \tag{5}$$

If the first supplementary campaign is performed, a cost S_1 of drilling must be compared to the gain of precision in estimation:

$$P_{M_1} = T[(g_m - 2\bar{\sigma}_{K_1}/m)v - C] - S_1 \tag{6}$$

the second drilling campaign leads to:

$$P_{M_2} = T[(g_m - 2\bar{\sigma}_{K_2}/m)v - C] - S_2 \tag{7}$$

where S_2 is the cost of drilling.

ΔP_{M_1} is the increment of the minimum (at a 2.5 % risk) profit expected by performing the first campaign:

$$\Delta P_{M_1} = P_{M_1} - P_M \tag{8}$$

$$\Delta P_{M_1} = T\left(\frac{2\bar{\sigma}_K}{m} - \frac{2\bar{\sigma}_{K_1}}{m}\right) v - S_1 \tag{9}$$

if ΔP_{M_1} is positive, it is interesting, in the assumptions made, to perform the supplementary drilling.

ΔP_{M_2} can be written as $P_{M_2} - P_M$ or

$$\Delta P_{M_2} = T\left(\frac{2\bar{\sigma}_{K_1}}{m} - \frac{2\bar{\sigma}_{K_2}}{m}\right) v - S_2 \tag{10}$$

and measures the interest of the second drilling campaign, compared with the first one.

Values of ΔP_{M_1} and ΔP_{M_2} were computed for the area of Fig. 5, for the range of cut-off grades shown in Fig. 6.

Results are show in Table 1[2] and 2[2].

TABLE 1

Increments of minimum profit expected for a 2.5 % risk by performing the first drilling campaign

Cut-off grade	Tonnage	$\frac{2\bar{\sigma}_K}{m} - \frac{2\bar{\sigma}_{K1}}{m}$	ΔP_{M1}
2	21.665	2.18	36.73
3	20.655	2.33	37.63
4	19.241	2.85	44.34
5	17.091	3.04	41.24
6	13.787	3.15	32.93

TABLE 2

Increments from the first to the second drilling campaign expected in the minimum profit for a 2.5 % risk

Cut-off grade	Tonnage	$\frac{2\bar{\sigma}_{K1}}{m} - \frac{2\bar{\sigma}_{K2}}{m}$	ΔP_{M2}
2	21.665	2.35	38.91
3	20.655	2.36	36.75
4	19.241	2.31	32.45
5	17.019	2.62	32.59
6	13.787	2.97	28.95

Second and third columns of Tables 1 and 2 were built from Fig. 3 and Fig. 6.

CONCLUSIONS

In the early stages of mine planning, the cost of supplementary information can be compared to the gain in precision of the estimations if it is assumed an allowed risk for the venture.

In this case story it is necessary to conjugate the exploitation strategy (which depends mainly on the cut-off grade) with the plant strategy (which depends mainly on the average grade). For a certain cut-off grade, it can be foreseen the expected average grade from the curve of Fig. 4.

The Profit is a function of this average grade, the lower limit of which may be fixed by a maximum allowed risk.

Supplementary drilling provides narrower confidence intervals for average grade curves and so, for a fixed risk, the minimum profit expected will be higher.

Drilling patterns used in this case story are arbitrary and so conclusions are empirical but a step-by-step procedure may be attempted to optimize the method.

ACKNOWLEDGEMENTS

We are indebted to METAIS DE GOIÁS S. A. for permission to publish data.

Also the internal report of PAA/EIM — Rogado et al (1976) was a valuable basis for this study. Fig. 1 was taken from this report.

In the preparation of software and running of programs the assistance of Mr. Santana Pereira was indispensable.

REFERENCES

David, M. (1972) — *Grade-Tonnage curve: use and misuse in ore reserve estimation. Transactions of the Inst. of Mining and Metall.*, Vol. 81 A, 129-132.

David, M. (1975) — *Geostatistical ore reserve estimation.* Rapport EP-75-R-52, École Polytechnique de Montréal.

Journel, A. (1975) — *Guide Pratique de Geostatistique Minière*, Ed. ENSMP, Paris.

Marechal, A. (1975) — *Forecasting a gradetonnage distribution for various panel sizes.* 13th APCOM, E-I (1-18).

Matheron, G. (1970) — *La théorie des variables régionalisées, et ses applications*, Fascicule 5, CMM, Fontainebleau.

Matheron, G. (1975) — *Transfer functions and their estimations. Proceedings of NATO ASI*, Rome.

Rogado, J.; Cortez, L.; Pereira, H.; Muge, F. (1976) — *Projecto Metago (Jazida Catalão) — Parte I: Avaliação da Reserva Mineral; Parametrização:* Internal Report of PAA/EIM — Engenharia para a Indústria Mineral S. A., Lisbon and S. Paulo.

(2) For propriety reasons values are multiplied by a constant.

NOTICIÁRIO

(Continuação da pág. 167)

NO FINAL DO SÉCULO O SOL SERÁ CEM VEZES MAIS BARATO

Afinal a crise da energia que tanto apregoam aos nossos ouvidos, deve ser bastante suave e limitada, pois que nenhum Governo aplicou, ainda, uma política de energia séria e incisiva. Os próprios Estados Unidos importam hoje mais 40 % de petróleo do que em 1973, ano que marca o início da crise.

Continuam a queimar carburante a um ritmo assustador, de tal forma que o consumo atingirá, este ano, mais de um bilião de toneladas.

A falar com franqueza e contrariamente ao que se pensa, a crise da energia ainda não surgiu. Só a conheceremos em 1985, e então com uma outra amplitude. Todos os especialistas mundiais concordam com esta previsão mais do que pessimista.

1985 — O ano da supercrise

É de resto fácil de compreender. O consumo mundial de petróleo é da ordem de um bilião e meio de toneladas. Ao ritmo actual, atingirá os dois biliões e meio de toneladas em 1985. E 1985 está à porta.

Entretanto os países da OPEP (os exportadores do ouro negro) já fizeram saber que os seus Governos, nessa data, não tencionam ultrapassar uma produção total de 1800 milhões de toneladas. A crise é, portanto, inevitável.

Em 1985, o consumo do mundo não comunista será asegurado 8 % pela hidráulica, 18 % pelo carvão, 20 % pelo gás natural e 8 % somente pela energia nuclear. A fonte de energia essencial continuará, portanto, a ser petróleo, com 46 %, contra os 53 % actuais.

Só daqui a alguns decénios é que o progresso técnico abrirá a porta de novas energias, termo-nucleares, mares, interior da terra e sol.

Minicentrais solares móveis

De todas as energias «paralelas», a fornecida pelo sol é a que tem mais possibilidades de se desenvolver rapidamente, o que, até agora, não era claro. É preciso reconhecer que as habitações solares (as casas aquecidas graças ao calor do astro) nada têm de estético. Quanto aos aquecimentos de água solares, a sua utilização é bastante limitada.

Por outro lado, as centrais solares, previstas aqui e acolá, são verdadeiros monstros da técnica, com milhares de hectares cobertos de painéis transmitindo o calor recebido para uma caldeira colocada no alto de uma torre de 150 metros. Que «beleza» na paisagem! Mas, eis que de repente, tudo vai mudar. Mini-centrais nucleares com potência de um ou dois kilowatts, apresentarão os seus espelhos curvos e reclináveis sobre uma circunferência de seis metros de diâmetro apenas. A caldeira, destinada a produzir o vapor, estará somente a dez metros de altura. Será o ideal para as aldeias do Terceiro Mundo ou para os bairros das nossas cidades. Fala-se mesmo já de mini-centrais móveis colocadas sobre camiões.

As descobertas vão em bom andamento. Na Austrália, na Unversidade de Sydney, para captar o calor solar com muito mais eficácia (a uma taxa de absorção de 80 %) foi criada uma bateria de tubos de vidro com um revestimento metálico, e colocado no vazio. Este processo será comercializado a partir de 1985.

O sol não só dá calor, como também luz. É esta última que as pilhas solares transformam directamente em electricidade. Hoje reservam-se sobretudo para os satélites, porque custam extremamente caro (mais de 1500$00 por watt). É que são fabricadas a partir de finíssimas lamelas de silício talhado num monocristal, cuja produção é muito onerosa.

Dentro de 20 anos, porém, a coisa será diferente graças a um novo material, o silício amorfo que em camadas muito finas, será colocado em suportes relativamente em conta. E o sol será cem vezes mais barato.

(Informação do «Expresso», de 9-2-1980)

técnica

REVISTA DE ENGENHARIA

associação dos estudantes do instituto superior técnico

Av. Rovisco Pais — 1000 Lisboa — Portugal — Telefone 88 93 23 — Telegramas AEIST

TABELA DE PREÇOS DE ANÚNCIOS

ADVERTISEMENT RATES

	1 página page	1/2 página page	1/4 página page
2.ª ou 3.ª capas 2nd & 3rd cover	8000$00	6400$00	4000$00
4.ª capa 4th cover	9600$00	—	—
Última página antes do texto Last page before text	6400$00	—	—
Páginas intercaladas no texto Pages in text	5600$00	4000$00	3200$00
Qualquer outra página Any other page	4800$00	3200$00	2400$00

Publicidade redigida — Agravamento de 100 %
Editorial advertising — 100 % more

Encartes — Por cada folha tamanho A4 será cobrado o preço de 1 página.
Inserts — For each sheet A4 (297 × 210 mm) the price of one page.

Descontos: 5 números 20 %
Dicounts: 10 insertions 40 %

Anúncios a cores: **mais**
Colour advertisements: plus 1500$00

por cada cor
per colour

Os anúncios são pagos depois da publicação.
Advertisement are paid after publication.

1. **Tiragem:**
   Circulation: 3000
2. **Línguas utilizadas na revista: Português, Inglês e Francês**
   Languages used in our journal: Portuguese, English and French
3. **Tipo de leitores: Engenheiros e estudantes de engenharia**
   Type of readershipe: Engineers and engineering students
4. **Periodicidade: Mensal (excepto Agosto e Setembro)**
   Frequency: Monthly (except August and September)
5. **Tipo de impressão: Tipografia. Anúncios em offset**
   Screen: 120. Printing process: Typography. Advertisements in offset
6. **Mancha:**
   Type area: 16,5×25 cm
7. **N.º de colunas:**
   No. of columns: 2
   Altura da coluna:
   Column depth: 25 cm
   Largura da coluna:
   Column width: 8 cm
8. **Material de impressão usado: Qualquer**
   Press maetrial required: Any
9. **Número corrente de páginas:**
   Usual number of pages: 60
10. **Cores possíveis: Quaisquer**
    Colours available: Any
11. **Comissão de agência:**
    Agent comission: 20 %

Já pensou...

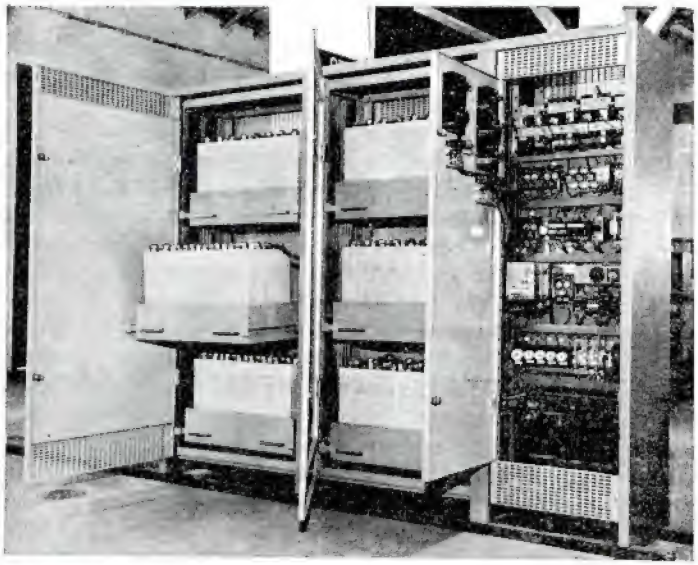
...que o seu anúncio
é muito eficaz se for
publicado na revista que
os seus clientes lêem?
Os milhares de exemplares
de cada número da nossa revista
são lidos por engenheiros
e técnicos, por pessoas ligadas
à indústria, à investigação, ao
ensino, pelos seus clientes,
em suma. Consulte-nos

técnica

REVISTA DE
ENGENHARIA Avenida Rovisco Pais — 1000 Lisboa — Telef. **88 93 23**

TUDOR

Alimentadores de C.C. para Serviço Estacionário



A TUDOR projecta e fabrica alimentadores e carregadores de baterias para todos os fins obedecendo às mais exigentes especificações.

Características Eléctricas

Carregador Principal

- Tensão de alimentação . . 3 x 380 V ± 10% 50 Hz ± 5%
- Potência Nominal . . . . .3x3 KW
- Funcionamento . . . . . .Regime flutuante estabilizado

Carregador Adicional

- Potência Nominal . . . . .0,3 KW
- Funcienamento . . . . . .Regime Tampão

Bateria

- Alcalina de Cádmio Níquel

BLOCO para alimentação de permanência e Socorro dos equipamentos de Protecção e Comando dos Serviços Auxiliares das subestações.
Fabricado para a EDP e E.P.

SOCIEDADE PORTUGUESA DO ACUMULADOR TUDOR, SARL. R. Actor Tasso 1 — Tel. 56 21 12

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 455

Ano LIV – Dezembro 1979

BORGES DA SILVA, J. F. — *O conceito de deslocamento eléctrico na teoria do campo electromagnético de Maxwell*, «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 133-140.

Baseados no relato do próprio Maxwell no seu célebre Tratado da Electricidade e Magnetismo, faz-se uma tentativa de seguir o raciocínio físico que conduziu aos conceitos de Deslocamento Eléctrico e da Corrente de Deslocamento que lhe está associada. Estes conceitos desempenharam um papel decisivo na formulação das leis de Maxwell do campo electromagnético, que se mantêm ainda hoje, mais de um século depois da sua descoberta, como uma das grandes conquistas da física teórica.

A circunstância de se verificar que algumas hipóteses chave, fundamentais para a génese da teoria, já não são sustentáveis à luz de conhecimentos mais recentes, constitui um fenómeno interessante para os historiadores e filósofos da ciência ponderarem.

ANDRADE E SILVA, João de — *A obra científica de Albert Einstein*, «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 141-144.

FIGANIER, João — *Relato sucinto do II Congresso Internacional para o ensino da engenharia (Darmstadt, Outubro de 1978)*, «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 145-150.

FORTES, M. Amaral — *Efeito de diversos parâmetros nas propriedades medidas em ensaios de tracção*, «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 151-157.

Com base numa teoria fenomenológica da deformação plástica procura precisar-se o significado das propriedades mecânicas medidas em ensaios de tracção e estuda-se o efeito de diversos parâmetros — designadamente a velocidade do ensaio, as dimensões do provete e a rigidez da máquina — nessas propriedades e, de um modo geral, nas curvas de tracção correspondentes à parte homogénea da deformação.

SILVA JOÃO, A. F., MELO ARRUDA, A. M. e NIETO DE CASTRO, C. A. — *Propriedades de transporte de gases diluídos*, «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 159-167.

Faz-se uma introdução à teoria de CHAPMAN-ENSKOG para gases a baixa pressão, aplicando-a ao estudo da viscosidade, da condutibilidade térmica e do coeficiente de autodifusão de moléculas simples (Kr, N_2, CH_4) e ao coeficiente de difusão mútua duma mistura d Ar-Kr. Esta aplicação requereu o cálculo dos parâmetros moleculares ε e σ para os vários gases, inerentes a três modelos de potencial intermolecular, os modelos de Lennard-Jones 6-12, Dymond-Alder e de Kihara, o que foi efectuado pelo método das rectas isotérmicas e dos estdaos correspondentes. Faz-se uma discussão da validade dos métodos aplicados para a previsão das propriedades de transporte dos gases diluídos, comparando-se os parâmetros obtidos com os obtidos pelas técnicas de inversão e de ajuste a várias propriedades.

MOURA, José Manuel Fonseca de — *A teoria dos sistemas no contexto do controlo e da comunicação*, «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 169-182.

Estuda-se neste relatório a disciplina Sistemas de Controlo e de Comunicação do grupo «Análise e Teoria dos Sistemas» do curso de Engenharia Electrotécnica. Começa-se por reflectir sobre o âmbito da Teoria dos Sistemas, especificando para o grupo de disciplinas as matérias afins e o espírito prevalecente. Percorre-se depois sumariamente aspectos do ensino da Teoria dos Sistemas no curso de Engenharia Electrotécnica no IST, nomeadamente no seu Departamento de Teoria dos Sistemas. Finalmente discute-se a natureza da disciplina de Sistemas de Controlo e de Comunicação concretizando-se o respectivo programa, o conteúdo, métodos de ensino e aspectos bibliográficos.

CORTEZ, L., MUGE, F. e PEREIRA, H. — *Planeamento mineiro de um depósito de fosfatos*, «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 183-187.

Nos estágios iniciais do planeamento de uma nova exploração mineira, o erro cometido na estimação das reservas é um factor importante que não deve ser desprezado. O cálculo deste erro por métodos Geoestatísticos permite a execução de uma análise de risco fixando certas condições económicas.

É descrito no artigo um exemplo concreto de aplicação destas técnicas. Trata-se de um depósito de fosfato explorado a céu aberto para o qual foram obtidas curvas tonelagem/teor com os respectivos intervalos de confiança. Estabeleceu-se uma relação entre estas curvas e uma função económica para três malhas de reconhecimento, tendo as subsequentes decisões sido tomadas com base num balanço entre o custo e o valor da informação suplementar.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 455

LIV — December 1979

SILVA JOÃO, A. F., MELO ARRUDA, A. M. e NIETO DE CASTRO, C. A. — *Transport properties of dilute gases,* «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 159-167.

This paper presents an introduction to the CHAPMAN-ENSKOG theory of dilute gases, and an application of it to the study of viscosity, thermal conductivity and self diffusion of simple molecules (Kr, N_2, CH_4) and to the mutual diffusion coefficient of the Ar-Kr mixture. The estimation of the intermolecular potential constants ε and σ has been made for the several gases, using the Lennard-Jones, Dymond-Alder and Kihara models, and two methods, the isotherms method and the corresponding states principle one. A discussion of the application of this theory to the prevision of transport properties of dilute gases is also made, followed by a comparison of the molecular paramethers obtained with those obtained by inversion techniques of fitting procedures.

MOURA, José Manuel Fonseca de — *Systems' theory in the context of control and communication,* «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 169-182.

The paper presents Control and Communication Systems, a subject of the group «Analysis and Theory of Systems» of the Electrical Engineering program. If starts out by reflecting on the nature of Systems Theory itself, specifying for the above group of subjects its contents and prevailing attitude. The report then summarizes aspects of the teaching of Systems Theory in the Electrical Engineering Course at IST, namely at its Systems Theory Department. Finally, the paper discusses Control and Communication Systems presenting its programm, its contents, the pedagogical methods used and the required bibliography.

CORTEZ, L., MUGE, F. e PEREIRA, H. — *Mine planning in a phosphate deposit,* «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 183-187.

In the early stages of the planning of a new exploitation, the error in ore reserve estimation is an important factor that must not be disregarded. As this error can be computed by geostatistical methods, the risk of the venture can be calculated for different recognition patterns in a certain asumption of economical conditions.

A case story is described for an open pit phosphate deposit in which grade/tonnage curves and their confidence intervals are related to an economic function for three drilling patterns and decisions are taken on the basis of cost and value of supplementary information.

BORGES DA SILVA, J. F. — *The concept of electric displacement in Maxwell's electromagnetic field theory,* «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 133-140.

Based on Maxwell's own account in his celebrated Treatise on Electricity and Magnetism, an attempt is made to follow the physical reasoning leading to the concepts of Electric Displacement and its associated Displacement Current. These concepts played a decisive role in the formulation of Maxwell electromagnetic field laws, which still stand today, more than a century after their discovery, as one of the greatest achievements of theoretical physics.

The circunstance of it being found that some key assumptions, fundamental to the genesis of the theory, are no longer tenable in the light of more recent knowledge, is an interesting phenomenon for historians and philosophers of science to ponder.

ANDRADE E SILVA, João de — *Cientific work of Albert Einstein,* «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 141-144.

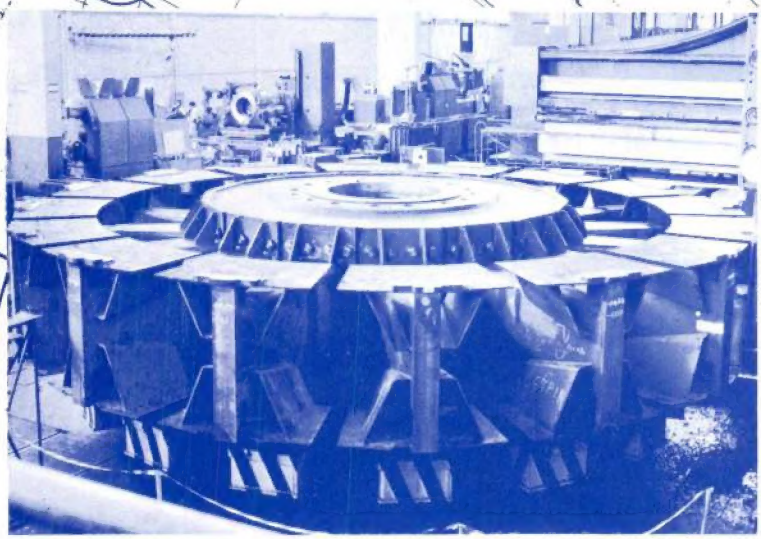
FIGANIER, João — *A brief relate of the II International Congress on Engineering Teaching (Darmstadt, October* 1978), «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 145-150.

FORTES, M. Amaral — *Effect of various parameters on the properties measured in tensile tests,* «Técnica», Lisboa, LIV (455) Dez. 1979, p. 151-157.

Using a phenomenological theory of plastic deformation an analysis is made of the significance of the various mechanical properties obtained from tensile tests and of the effect of parameters, such as the strain rate, the dimensions of the specimens and the tensile machine stifness, on these properties and, in general, on the tensile curves for the homogeneous deformation in tension.

PRIMEIRO ALTERNADOR MOTOR FABRICADO EM PORTUGAL

AGUIEIRA



Rotor alternador em fase de maquinagem

Destinado à Central Hidroeléctrica da Aguieira e sob licença da Alsthom-Atlantique a Sorefame fabrica o primeiro Alternador Motor tendo como principais características:

Potencia	100 MVA
Velocidade de rotação	125 r. p. m.
Tensão nominal	12 000 volts
Diâmetro exterior	11,5 m
Diâmetro da parte girante	9,5 m
Peso do rotor	225 toneladas
Peso total	420 toneladas

SOREFAME

SOCIEDADES REUNIDAS DE FABRICAÇÕES METÁLICAS, S. A R L.

Amadora – Portugal

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . . . 600$00

TOPOGRAFIA GERAL

C. Xerez — 1.º vol. 3.ª edição — 1978 . . 460$00
C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . (*)

TABELAS TÉCNICAS

Vicente Ferreira e Brazão Farinha, 8.ª edição 1977 700$00

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL

A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . 580$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO

Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 (*)

NÚMEROS E VARIÁVEIS COMPLEXAS

A. H. Simões de Abreu, 1.ª edição — 1977 . 400$00

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS

A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 200$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS

G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 150$00

MANUAL DE ESTRUTURAS

Brazão Farinha — 1.º vol. 1.ª edição — 1976 750$00

2.º e 3.º Volumes . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO

(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . 550$00

HIDRÁULICA GERAL

1 — Fundamentos teóricos, 1.ª ed. — 1979 675$00
2 — Escoamentos Líquidos . . . . . (*)

A. Manzanares

PROPAGAÇÃO E RADIAÇÃO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

1 — Ondas e Meios Materiais, 1.ª ed. - 1979 560$00
2 — Radiação . . . . . (*)

M. de Abreu Faro

Monografia n.º 1

CAUDAL PARA DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS HIDRÁULICAS E AMORTECIMENTO DE CHEIAS EM ALBUFEIRAS

António Carvalho Quintela e António Betâmio de Almeida, 1.ª edição — 1975 . . . 10$00

Monografia n.º 2

ESCOAMENTO COM SUPERFÍCIE LIVRE EM CANAIS DE SECÇÃO CIRCULAR

António Betâmio de Almeida, 1.ª ed. — 1978 30$00

(*) LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À **técnica**